*Written strictly in accordance with the New Syllabus for Higher Secondary and Multipurpose Schools for Class X.*

# HIGHER SECONDARY
# ELECTIVE MATHEMATICS
## PART II
## (CLASS X)


BY

SRI KESHAB CHANDRA NAG

*Retired Headmaster, Mitra Institution (Bhowanipur), Author of School Final & H.S. Core Mathematics, Patiganit (VII, VIII), Core Math., (IX-X), Naba Patiganit (V, VI), S. F. Aichhik Ganit (IX-X) & S.F. Addl. Math. H.S. Elective Mathematics Parts I—III.*





CALCUTTA BOOK HOUSE

1/1, College Square (East), Calcutta-12

Published by
P. C. BHOWAL
1/1, College Square
Calcutta-12.



EIGHTH EDITION—1964



Price Rupees Four Only

Printed by
P. C. BHOWAL
Mudran Bharati (P.) Limited
2. Ramnath Biswas Lane, Calcutta-9.

# পরিচায়িকা

Higher Secondary ( একাদশ শ্রেণী ) বিদ্যালয়গুলির জন্য নূতন সিলেবাস অনুযায়ী লিখিত Elective Mathematics-এর কোন পাঠ্যপুস্তক না থাকায় অল্প দিন হইল আমি নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর পাঠ্য Elective Mathematics-এর তিনটি খণ্ড প্রকাশ করি। অদ্য দশম শ্রেণীর পাঠ্য Elective Mathematics-এর দ্বিতীয় খণ্ডের পরিবর্ধিত দ্বিতীয় সংস্করণ প্রকাশিত হইল। এই পুস্তকটির প্রতি খণ্ড স্বয়ংসম্পূর্ণ। দুরূহ বিষয়গুলি সহজবোধ্য করিবার জন্য ইহাতে বহু প্রকারের সমাধান উদাহরণস্বরূপ দেওয়া হইয়াছে।

আমার অন্যান্য গণিত পুস্তকগুলির ন্যায় এই পুস্তকখানিও শিক্ষার্থিগণের উপকার সাধনে সমর্থ হইলে আমার শ্রম সার্থক মনে করিব।

শ্রদ্ধেয় শিক্ষক মহাশয়েরা আমার এই পুস্তকখানি সহানুভূতির সহিত গ্রহণ করিলে বিশেষ সুখী হইব। ইতি—

ভবানীপুর
৮ই জুন, ১৯৫৯

**শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ**
গ্রন্থকার

## তৃতীয় সংস্করণ

এই সংস্করণে 'স্থানাঙ্ক জ্যামিতি'র অংশ সম্পূর্ণ নূতনভাবে লেখা হইয়াছে। এই কার্যে আমার শ্রদ্ধেয় সহকর্মী শ্রীবীরেন্দ্রমোহন চক্রবর্তী মহাশয় আমাকে বিশেষ সাহায্য করিয়াছেন। ইতি—

ভবানীপুর
২রা মে, ১৯৬০

**শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ**

**To prove :**

1. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

2. All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

3. If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the plane.

Concept of angle between two planes, an angle between a straight line and a plane. Concept of parallelism of planes. Concept of a line being parallel to a plane. Concept of skew lines.

## CO-ORDINATE GEOMETRY :

Rectangular cartesian co-ordinates in a plane ; Lengths of segments ; Section of a finite segment in a given ratio ; Area of a triangle ; Straight line.

## MENSURATION :

Parallelopipeds, Right Circular cones, Prisms and Pyramids ( Expressions without proof, of the surfaces and volumes of these solids ).

## TRIGONOMETRY :

Trigonometrical ratios of any angle ; Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle ; Addition and subtraction formulas ; Transformation of products and sums ; Multiple and sub-multiple angles.

*Note*—It is recommended that Solid Geometry and Mensuration of Solids be taught through the drawing board, and the making and handling of Solid models.

# CONTENTS

*Subject* *Page*

## GEOMETRY



## SOLID GEOMETRY



## CO-ORDINATE GEOMETRY

## প্রথম অধ্যায়

# MENSURATION ( পরিমিতি )

## Solids ( ঘন বস্তু )

**সংজ্ঞা :** তোমরা জান একখানি পুস্তক বা ইষ্টক অথবা একটি গোলাকার বল এক একটি ঘন বস্তু এবং উহাদের প্রত্যেকে কিছু পরিমাণ দেশ (space বা শূন্যস্থ স্থান ) দখল করিয়া অবস্থান করে।

1. এক বা বহু সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত দেশ বা শূন্যস্থ স্থানকে **ঘন বস্তু** বা **ঘন** ( solid ) বলে।

2. সমতলসমূহ দ্বারা বেষ্টিত স্থানকে বহুতলক ( polyhedron ) বলে।

**দ্রষ্টব্য :** সমতলস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে যেমন ন্যূনপক্ষে তিনটি সরল রেখা দরকার হয়, তদ্রূপ শূন্যস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে ন্যূনপক্ষে চারিটি সমতল দরকার।

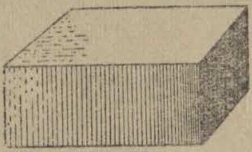
এই সমতলগুলিকে ঘন বস্তুর তল ( faces ) বলে এবং দুইটি তল যে সরল রেখায় পরস্পর ছেদ করে সেই সরল রেখাকে প্রান্ত রেখা বা প্রান্তিকী ( edge ) বলে।

**দৃষ্টান্ত :** একটি ইষ্টক ছয়টি সমতল ক্ষেত্র দ্বারা বেষ্টিত। এই তলগুলি 12টি সরল রেখায় ছেদ করিয়াছে।

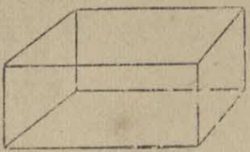
একটি ক্রিকেট বল একটি বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত।

3. যে ঘন তিন জোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা বেষ্টিত তাহাকে ঘন সামান্তরিক ( Parallelopiped ) বলে।

ইহার প্রতি তল সামান্তরিক এবং দুই দুইটি বিপরীত তল সর্বসম।



চিত্র 1



চিত্র 2

4. ঘন সামান্তরিকের তলগুলি যদি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে উহাকে আয়ত ঘন বা সমকোণী চৌপল ( Rectangular Parallelopiped ) বলে। ইহার তলগুলি পরস্পর সমকোণে সংযুক্ত।

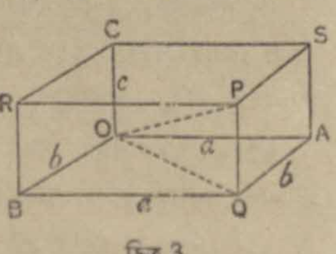
যেমন একটি কাঠের বাক্স। ইহার ছয়টি তল আছে, যথা—নীচে একটি, উপরে একটি এবং চারি পাশে চারিটি, এই মোট ছয়টি।

3-নম্বর চিত্রে তলগুলি OAQB, CRPS, OASC, OBRC, BRPQ এবং AQPS.

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বা বেধ আছে।

**ঘনফল ঃ** ঘনবস্তুর তলগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ দেশকে উহার আয়তন বা ঘনফল ( volume ) বলে। ঘনফলের তিনটি মাত্রা থাকে। ক্ষেত্রফলের মাত্রা দুইটি। অতএব, ঘনফলকে ঘন এককে এবং ক্ষেত্রফলকে বর্গ এককে প্রকাশ করিতে হয়।

মনে কর, কোন আয়তঘনের দৈর্ঘ্য $a$ একক, প্রস্থ $b$ একক এবং উচ্চতা $c$ একক।




চিত্র 3

অতএব,

($a$) আয়তঘনের তলগুলির ক্ষেত্রফল

$=(2ab+2bc+2ca)$ বর্গ একক

$=2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক।

($b$) আয়তঘনের **ঘনফল**

$=$ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা

$= abc$ ঘন একক।

($c$) এখানে [ চিত্র 3 ] OP, আয়তঘনের **কর্ণ**।

$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$ [ $\because$ $\angle OQP = 1$ সমকোণ ]

$= OA^2 + AQ^2 + PQ^2$ [ $\because$ $\angle OAQ = 1$ সমকোণ ]

$= a^2 + b^2 + c^2$,

$\therefore$ কর্ণ $= \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2 + \text{উচ্চতা}^2}$ ।

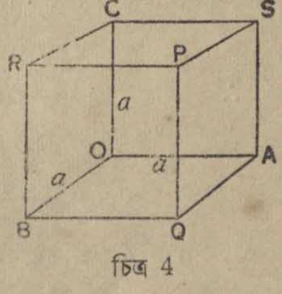
**5.** যদি আয়তঘনের তলগুলি বর্গক্ষেত্র হয় এবং উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হয়, তবে তাহাকে **ঘনক** (cube) বলে।

ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি $a$ একক হইলে

(i) ঘনকের **তলগুলির ক্ষেত্রফল** $= 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$.

(ii) **ঘনকের ঘনফল** $= a^3$.

(iii) ঘনকের কর্ণ $= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.



চিত্র 4

## উদাহরণমালা 1

**উদা. 1.** Find the area of the whole surface, the volume and the diagonal of a rectangular solid whose dimensions are 4 yds., 1 yd. 1 ft. and 3 ft.

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য $(a) = 4$ গ. $= 12$ ফু., প্রস্থ $(b) = 1$ গ. 1ফু. $= 4$ ফু. এবং উচ্চতা $(c) = 3$ ফু.।

$\therefore$ উহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল $= 2(bc + ca + ab)$

$= 2(4 \times 3 + 3 \times 12 + 12 \times 4)$ ব. ফু. $= 192$ বর্গ ফুট।

উহার ঘনফল $= abc = 12$ ফু. $\times 4$ ফু. $\times 3$ফু. $= 144$ ঘনফুট।

উহার কর্ণ $= \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{12^2+4^2+3^2}$ ফুট $= \sqrt{169}$ ফু.

$= 13$ ফুট।

উদা. 2. Find the area of the whole surface, the volume and the diagonal of a cube each edge of which is 7 ft.

ঘনকটির তলসমূহের ক্ষেত্রফল $= 6a^2 = 6 \times 7^2$ ব. ফু. $= 294$ ব. ফু.।

উহার ঘনফল $= a^3 = (7)^3$ ঘ. ফু. $= 343$ ঘনফুট।

উহার কর্ণ $= \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times 7$ ফু. $= 7\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 3. What is the length of the edge of a cube of which the total area of the surfaces is 346·56 sq. cm.? [C. U. 1956]

মনে কর, ঘনকটির প্রত্যেক প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য $= a$ সে. মি.।

$\therefore$ উহার সমগ্রতল $= 6a^2$ বর্গ সে. মি.,

$\therefore$ $6a^2 = 346{\cdot}56$ বর্গ সে. মি.,

বা, $a^2 = \dfrac{346{\cdot}56}{6}$ বর্গ সে. মি. $= 57{\cdot}76$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ $a = \sqrt{57{\cdot}76}$ সে. মি. $= 7{\cdot}6$ সে. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রান্তিকী $= 7{\cdot}6$ সেন্টিমিটার।

উদা. 4. Find the length of the edge of a cube whose total area of the surfaces is equal in magnitude to the volume of the cube.

এখানে বলা আছে যে, ঘনকটির তলগুলির ক্ষেত্রফল যত একক উহার ঘনফলও তত একক। মনে কর, উহার বাহুর দৈর্ঘ্য $a$ একক।

এক্ষণে, উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গ একক

এবং উহার ঘনফল $= a^3$ ঘন একক। $\therefore$ $a^3 = 6a^2$, $\therefore$ $a = 6$.

অতএব, ঘনকটির প্রান্তিকী $= 6$ দৈর্ঘ্য একক।

**উদা. 5.** The dimensions of a rectangular solid are as 4 : 3 : 2 and its total surface is 1300 sq. in. ; find its length, breadth and height.

এখানে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত = 4 : 3 : 2.

সুতরাং, দৈর্ঘ্য যদি $4a$ ইঞ্চি হয়, তবে প্রস্থ $3a$ ইঞ্চি এবং উচ্চতা $2a$ ইঞ্চি হইবে।

এক্ষণে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(4a \times 3a + 4a \times 2a + 3a \times 2a)$ ব. ই.
$= 52a^2$ বর্গ. ই.

$\therefore$ $52a^2 = 1300$ ব. ই. (স্বীকার), বা $a^2 = 25$ ব. ই., $\therefore$ $a = 5$ ই.।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 5$ ই. $\times 4 = 20$ ইঞ্চি, প্রস্থ $= 5$ ই. $\times 3 = 15$ ইঞ্চি, এবং উচ্চতা $= 5$ ই. $\times 2 = 10$ ইঞ্চি।

**উদা. 6.** Three cubes of metal whose edges are 3, 4 and 5 inches respectively are melted and formed into a single cube, show that the edge of the new cube will be 6 inches. [P.U.]

প্রদত্ত ঘনক তিনটির মোট ঘনফল $= \{(3)^3 + (4)^3 + (5)^3\}$ ঘ. ই.
$= 216$ ঘন ইঞ্চি

অতএব, নূতন ঘনকটির ঘনফল $= 216$ ঘনইঞ্চি,

$\therefore$ উহার ( প্রান্তিকী $)^3 = 216$ ঘ. ই.

$\therefore$ উহার নির্ণেয় প্রান্তিকী $= \sqrt[3]{216}$ ই. $= \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6}$ ই. $= 6$ ইঞ্চি।

**উদা. 7.** Find the length of the longest rod that can be placed in a room 30 ft. long, 24 ft. broad and 18 ft. high. [ P. U. ]

এখানে বুঝা যায় যে, দীর্ঘতম দণ্ডটি ঐ গৃহের কর্ণের সমান হইবে।

এক্ষণে, কর্ণ $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ; এখানে $a = 30$ফু., $b = 24$ফু., $c = 18$ফু.।

$\therefore$ নির্ণেয় দণ্ডের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{30^2 + 24^2 + 18^2}$ ফু. $= \sqrt{1800}$ ফু.
$= 30\sqrt{2}$ ফু. $= 42{\cdot}42$ ফুট ( প্রায় )।

উদা. 8. A closed box which externally measures 16 in. long, 12 in. broad and 8 in. high, is made of wood half an inch thick. Find the cost of painting its inner surface at 1a. 6p. per sq. ft.

কাঠের তক্তা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু হওয়ায় বাক্সটির ভিতরের দিকের মাত্রাগুলির প্রত্যেকটি $\frac{1}{2}$ ই. $\times 2$ বা 1 ইঞ্চি করিয়া কম হইবে।

$\therefore$ ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য $=15$ ই., প্রস্থ $=11$ ই. এবং উচ্চতা $=7$ ই.

ভিতরের সমগ্রতল $=2(15\times 11+15\times 7+11\times 7)$ ব. ই.

$=694$ ব. ই. $=\frac{694}{144}$ ব. ফু.

$\because$ এক বর্গফুটের খরচ $=\frac{3}{2}$ আনা,

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $=\frac{694}{144}\times\frac{3}{2}$ আ. $=\frac{347}{48}$ আ. $=7$ আ. $2\frac{3}{4}$ পা.।

[ দ্রষ্টব্য :—বাক্সটির ঢাকনা না থাকিলে ভিতরের উচ্চতা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি কম হইত, অন্য মাত্রাগুলি 1 ইঞ্চি কম হইত। ]

উদা. 9. A school room is to be built to accommodate 70 children, so as to allow $8\frac{1}{2}$ sq. ft. at floor and $110\frac{1}{2}$ cubic ft. of space for each child ; if the room be 34 ft. long, what must be its breadth and height ? [ S. A. ]

প্রত্যেক বালকের জন্য $8\frac{1}{2}$ ব. ফু. মেঝে লাগে

$\therefore$ ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল $=8\frac{1}{2}$ ব. ফু. $\times 70=595$ ব. ফু.

$\because$ ঘরের দৈর্ঘ্য $=34$ ফুট, $\therefore$ উহার নির্ণেয় প্রস্থ $=\frac{595}{34}$ ফু. $=17\frac{1}{2}$ ফু.।

আবার, প্রত্যেক বালকের জন্য $110\frac{1}{2}$ ঘ. ফু. আয়তনের স্থান লাগে,

$\therefore$ ঘরটির ঘনফল $=110\frac{1}{2}$ ঘ. ফু. $\times 70=7735$ ঘ. ফু.,

কিন্তু উহার দৈর্ঘ্য $=34$ ফু. এবং প্রস্থ $=\frac{35}{2}$ ফু.,

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=\frac{7735\times 2}{34\times 35}$ ফু. $=13$ ফুট।

উদা. 10. The three conterminous edges of a rectangular solid are 36, 75 and 80 in. respectively ; find the edge of a cube which will be of the same capacity. [ R. E. ]

এখানে আয়তঘনের মাত্রাগুলি 36 ই., 75 ই., 80 ই. ;

$\therefore$ ঘনকের ঘনফল = আয়তঘনের ঘনফল $= 36 \times 75 \times 80$ ঘ. ই.

$\therefore$ ঘনকের প্রান্তিকী ( বাহু ) $= \sqrt[3]{36 \times 75 \times 80}$ ই.

$= \sqrt[3]{3^3 \times 4^3 \times 5^3}$ ই. $= 3 \times 4 \times 5$ ই. $= 60$ ইঞ্চি।

**উদা** 11. A rectangular reservoir is 100 ft. long by 64 ft. broad ; at what rate of speed per hour must water flow into it through a pipe, whose cross-section is a square of side 2in., in order to make the water rise 2 ft. in 8 hrs. ? [B. U.]

জলাধারের দৈর্ঘ্য $= 100$ ফু. এবং প্রস্থ $= 64$ ফু.।

8 ঘণ্টায় উহাতে 2 ফুট গভীর জল প্রবেশ করিয়াছে,

$\therefore$ ঐ জলের ঘনফল $= 100 \times 64 \times 2$ ঘ. ফু. $= 12800$ ঘ. ফু.

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় উহাতে $\frac{12800}{8}$ বা 1600 ঘন ফুট জল প্রবেশ করে। যে নল দিয়া জল প্রবেশ করে তাহার প্রস্থচ্ছেদ ( cross-section ) $=$ 2 ই. $\times$ 2 ই. $= 4$ ব. ই. $= \frac{1}{36}$ ব. ফু. ;

$\therefore$ প্রতি ঘণ্টায় ইহাতে $(1600 \div \frac{1}{36})$ ফু. বা $\frac{1600 \times 36}{3 \times 1760}$ মাইল বা $10\frac{10}{11}$ মাইল বেগে জল প্রবেশ করে।

### Exercise 1

1. Find the total surface, the volume and the diagonal of a rectangular solid whose dimensions are 3 ft., 2 ft. and 4 ft.

2. Find the whole surface, the volume and the diagonal of a cube whose edge is 5 ft.

3. Find the total surface and the volume of a cube whose diagonal measures $3\sqrt{3}$ ft.

4. What is the length of the edge of a cube whose total surface is 37·5 sq. ft. ?

5. The dimensions of a rectangular solid are 8 ft., 6 ft. and 5 ft., find its total surface.

6. The diagonal of a cube is 30 in. ; what is the solid content ? [ S. A. ]

7. The dimensions of a rectangular solid are as 5 : 3 : 2 and its total surface measures 558 sq. in., find the dimensions.

8. The whole surface of a cube is equal to the sum of the whole surfaces of three other cubes whose edges are 3 in., 4 in. and 1 ft. respectively. Find the edge of the first cube.

9. The total surface of a rectangular solid of square base is 506 sq. ft. and its height is 6 ft., find its length and breadth.

10. Find how many bricks of which the length, breadth and thickness are 9, $4\frac{1}{2}$ and 3 in., will be required to build a wall of which the length, height and thickness are 72, 8 and $1\frac{1}{2}$ ft. [ R. E. ]

11. A closed box, which externally measures $5\frac{1}{2}$ ft. long, $4\frac{2}{3}$ ft. wide and $5\frac{1}{6}$ ft. high, is made of wood 1 in. thick. Find the cost of painting its inner surface at 9 p. per sq. ft.

12. A box without a lid is made of wood an inch thick ; the external length, breadth and height of the box are 2 ft. 10 in., 2 ft. 5 in. and 1 ft. 7 in. respectively ; find what volume the box will hold and the number of cubic inches of wood. [ S. A. ]

13. Find the length of the longest rod that can be placed in a room which is 20 ft. long, 12 ft. broad and 9 ft. high.

14. Three cubes of metal whose edges are 5, 4 and 3 ft. respectively are melted and formed into a single cube. Find its diagonal.

15. The external length, breadth and height of a rectangular wooden box are 18 in., 10 in., and 6 in. respectively,

and the thickness of wood is half an inch. When the box is empty it weighs 15 lbs., and when filled with sand 100 lbs. Find the weight of a cubic inch of wood and that of sand. [S. A.]

**16.** If $a$ be the length of each edge of a cube, show that the diagonal of each face is $a\sqrt{2}$, and the diagonal of the solid is $a\sqrt{3}$. [R. U. S.]

**17.** A reservoir is 24 ft. 8 in. long by 12 ft. 9 in. wide; find how many cubic feet of water must be drawn off to make the surface sink 1 ft. [S. A.]

**18.** A cistern is filled in $3\frac{1}{2}$ hrs. by a pipe 3 sq. in. in cross-section, through which water flows at the rate of 6·4 miles an hour; what is the volume of the cistern? [R.M.A.]

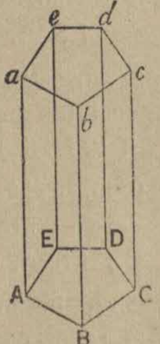
## Prism ( প্রিজম্ )

2. কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনের যদি প্রান্ততল দুইটি ( ends ) সমান্তরাল ও সর্বসম হয় এবং পার্শ্বতলসমূহ ( side faces ) সামান্তরিক হয়, তবে উহাকে **প্রিজ্‌ম্** বলে।

5-নম্বর চিত্রে অঙ্কিত প্রিজ্‌ম্‌টির একটি প্রান্ততল ABCDE এবং আর একটি প্রান্ততল $abcde$; এই তল দুইটি সর্বসম এবং প্রত্যেকটির পাঁচটি করিয়া বাহু। AB$ba$, BC$cb$, C$cd$D প্রভৃতি তলগুলিকে ইহার **পার্শ্বতল** বলে। এই পার্শ্বতলগুলি সামান্তরিক।

সর্বসম প্রান্ততলগুলি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ হইতে পারে এবং তদনুসারে ইহার ত্রিভুজ প্রিজ্‌ম্ ( triangular prism ), চতুর্ভুজ প্রিজ্‌ম্, প্রভৃতি নাম হয়।

প্রিজ্‌ম্‌টি যে প্রান্ততলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে প্রিজ্‌মের **ভূমি** ( base ) বলে। চিত্রে ABCDE তলটি প্রিজ্‌ম্‌টির ভূমি।




চিত্র 5

প্রিজ্‌মের প্রান্ততল দুইটির মধ্যে লম্ব দূরত্বকে উহার উচ্চতা বলে।

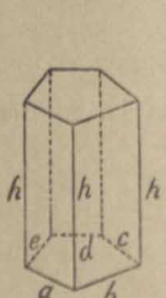
প্রতি দুইটি পার্শ্বতল যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে পার্শ্ব-প্রান্তিকী ( side edge ) বলে।

যে প্রিজ্‌মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি প্রান্ততলের উপরে লম্ব হয় তাহাকে **লম্ব প্রিজ্‌ম্‌** ( Right prism ) বলে। এতদ্ব্যতীত অন্য প্রিজ্‌ম্‌কে **তির্যক প্রিজ্‌ম্‌** ( oblique prism ) বলে।

লম্ব প্রিজ্‌মের পার্শ্বতলগুলি আয়তক্ষেত্র হয় এবং পার্শ্বপ্রান্তিকীকে উহার উচ্চতা বলা হয়। যে কোন প্রিজ্‌মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি সমান হয়।

[ **দ্রষ্টব্য** : আয়তঘন একটি লম্ব প্রিজ্‌ম্‌ ]

যদি লম্ব প্রিজ্‌মের উচ্চতা $h$ একক এবং প্রান্ততলের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d \cdots\cdots$ একক হয়, তবে




চিত্র 6

(a) প্রিজ্‌মের **পার্শ্বতলসমূহের ক্ষেত্রফল**

$= ah + bh + ch + dh + \cdots\cdots$

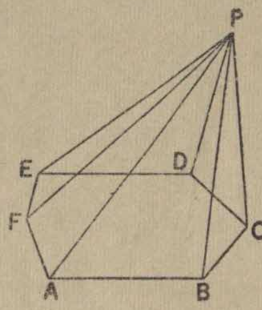
$= (a+b+c+d+\cdots)h$

**= প্রান্ততলের পরিসীমা × উচ্চতা।**

(b) **লম্ব প্রিজ্‌মের ঘনফল = প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।**

## Pyramid ( পিরামিড )

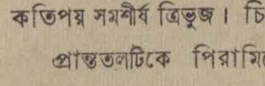
3. কোন সমতলস্থ বহুভুজের শীর্ষ বা কৌণিক বিন্দুগুলি যদি সমতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর সহিত যুক্ত করা যায়, তবে যে দেশ বেষ্টিত হয় তাহাকে পিরামিড ( pyramid ) বলে।




চিত্র 7

অতএব, পিরামিডের প্রান্ততলটি একটি বহুভুজ এবং ইহার পার্শ্বতলগুলি কতিপয় সমশীর্ষ ত্রিভুজ। চিত্র 7 দেখ।

প্রান্ততলটিকে পিরামিডের ভূমি ( base ) এবং ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুকে ইহার **শীর্ষ** বলা হয়। শীর্ষ হইতে ভূমির উপরে অঙ্কিত লম্বকে ইহার উচ্চতা ( height ) বলা হয়। প্রতি দুইটি ত্রিভুজ যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে পার্শ্বপ্রান্তিকী বলে।



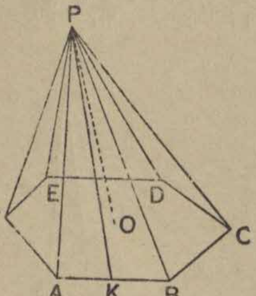

চিত্র 8

যদি পিরামিডের ভূমি সুষম বহুভুজ হয় এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির কেন্দ্র ( অর্থাৎ ঐ বহুভুজের পরিবৃত্তের বা অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র ) দিয়া যায় তবে ঐ পিরামিডকে **লম্ব পিরামিড** ( right pyramid ) বলে। ইহার পার্শ্বতলগুলি সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইল। চিত্র 8 দেখ।

এতদ্ব্যতীত অন্য পিরামিডগুলিকে তির্যক পিরামিড বলে। চিত্র 9 দেখ। এই পিরামিডের শীর্ষ হইতে প্রান্ততলের যে কোন বাহুর উপরে লম্ব টানিলে এই লম্বকে **তির্যক উচ্চতা** ( slant height ) বলে।

[ **দ্রষ্টব্য :** 9 নম্বর চিত্রে PO পিরামিডের উচ্চতা এবং PK উহার তির্যক উচ্চতা। ]

যে পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ তাহাকে **চতুস্তলক** ( tetrahedron ) বলে। ইহার ভূমি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং পার্শ্বতলত্রয় সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ হইলে উহাকে লম্ব চতুস্তলক বলে।



চিত্র 9

চতুস্তলকের চারিটি তল, চারিটি শীর্ষ এবং ছয়টি প্রান্তিকী থাকে।

যদি কোন লম্ব পিরামিডের ভূমির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d, \cdots\cdots$ একক হয় এবং পিরামিডের উচ্চতা $h$ এবং তির্যক উচ্চতা $l$ একক হয়, তবে

(a) লম্ব পিরামিডের **পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল**

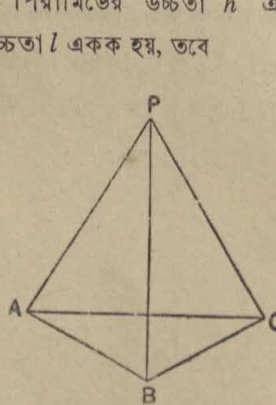
$= \frac{1}{2}al + \frac{1}{2}bl + \frac{1}{2}cl + \frac{1}{2}dl + \cdots$

$= \frac{1}{2}(a+b+c+d+\cdots)l$

= ভূমির অর্ধ-পরিসীমা × তির্যক উচ্চতা

(b) লম্ব পিরামিডের **ঘনফল**

$= \frac{1}{3}$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।



চিত্র 10

## উদাহরণমালা 2

উদা. 1 The base of a right prism, 12 ft. high, is an equilateral triangle on a side of 3 ft.; find the area of its rectangular faces.

আয়ত পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

এখানে ভূমির পরিসীমা = সমবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা = 3 ফু. × 3 = 9ফু.

এবং উচ্চতা = 12 ফুট।

∴ নির্ণেয় পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = 9 ফু. × 12 ফু. = 108 বর্গফুট।

**উদা. 2.** The base of a right prism is a triangle whose sides are 17 ft., 25 ft. and 28 ft. If its height is 20 ft., find its volume.

এখানে ভূমি-ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা ( $s$ ) $=\frac{1}{2}(28+25+17)$ ফু.

$=35$ ফুট ;

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ব. ফু.

$=\sqrt{35(35-28)(35-25)(35-17)}$ ব. ফু.

$=\sqrt{35\times7\times10\times18}$ ব. ফু.

$=\sqrt{5^2\times6^2\times7^2}$ ব. ফু. $=210$ বর্গফুট।

$\therefore$ লম্ব প্রিজ্‌ম্‌টির ঘনফল = প্রান্ততল বা ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$=210$ বর্গফুট $\times 20$ ফু. $=4200$ ঘনফুট।

**উদা. 3.** Find the volume and lateral surface of a right prism 8 inches high standing on an isosceles triangle, each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.

[C. U. 1945 ]

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, ঐ লম্বটি $h$.

$\therefore\ h^2=(5)^2-(3)^2=16,$

$\therefore\ h=4$ ; সুতরাং ত্রিভুজটির উচ্চতা $=4$ ই.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{2}\times6$ ই. $\times4$ ই. $=12$ ব. ই.।

$\therefore$ লম্ব প্রিজ্‌ম্‌টির ঘনফল $=12$ ব. ই. $\times 8$ ই. $=96$ ঘনইঞ্চি ;

এবং উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

$=(5+5+6)$ ই. $\times 8$ ই. $=128$ বর্গ ইঞ্চি।

[ **দ্রষ্টব্য** :—এখানে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এই সূত্রের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়। ]

**উদা. 4.** The base of a right prism, 10 inches high, is an equilateral triangle on a side of 8 in.; find the volume of the prism.

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ [ $a$ ত্রিভুজের বাহু ধরিয়া ]

$\therefore$ এখানে প্রিজ্‌মটির ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2$ ব. ই. $=16\sqrt{3}$ ব.ই.

$\therefore$ উহার নির্ণেয় ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$=16\sqrt{3}$ ব. ই. $\times 10$ ই. $=160\sqrt{3}$ ঘন ইঞ্চি।

**উদা. 5.** The volume of a right prism is 330 cu. ft. and its base is a triangle whose sides are 5 ft., 12 ft. and 13 ft. respectively. Find the height and the total surface of the prism.

এখানে দেখা যায় যে $5^2+12^2=169=13^2$.

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় 5 ফুট ও 12 ফুট।

$\therefore$ প্রিজ্‌মের ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 12\times 5$ ব. ফু. $=30$ ব. ফু.

এক্ষণে, নির্ণেয় উচ্চতা $=\frac{\text{ঘনফল}}{\text{ভূমির কালি}}=\frac{330 \text{ ঘ. ফু.}}{30 \text{ ব. ফু.}}=11$ ফুট।

আবার, ভূমির পরিসীমা $=(5+12+13)$ ফু. $=30$ ফুট,

$\therefore$ পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=30$ ফু. $\times 11$ ফু. $=330$ ব. ফু.

$\therefore$ প্রিজ্‌মটির সমগ্রতল-পরিমাণ = পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল + প্রান্ততল দুইটির ক্ষেত্রফল $=(330$ ব. ফু. $+30$ ব. ফু. $\times 2)=390$ বর্গফুট।

[ দ্রষ্টব্য :—এখানে ত্রিভুজের কালি $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এই সূত্র হইতেও ত্রিভুজটির কালি নির্ণয় করা যাইত। আরও দেখ, এখানে সমগ্রতল বলিতে পার্শ্বতলগুলির এবং দুইটি প্রান্ততলের সমষ্টি বুঝাইতেছে এবং প্রান্ততল দুইটি মিলিয়া ভূমির দ্বিগুণ। ]

উদা. 6. The area of the lateral surface of a right prism is 882 sq. ft. and its height 14 ft.; if the base is a regular polygon of seven sides, find the length of each side.

মনে কর, ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য $a$ ফুট।

∴ প্রিজ্‌মটির পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

$= 7a \times 14$ ব. ফু. $= 98a$ বর্গফুট।

∴ $98a = 882$ (স্বীকার), ∴ $a = \frac{882}{98} = 9.$

∴ ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 ফুট।

উদা. 7. The base of a right prism, $5\sqrt{3}$ ft. high, is a regular hexagon whose side is 6 ft. Find its volume.

এখানে ভূমিটি সুষম ষড়্‌ভুজ, সুতরাং উহার ক্ষেত্রফল 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

∴ এখানে প্রিজ্‌মের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 6$ ব. ফু.

$= 54\sqrt{3}$ ব. ফু.

∴ উহার ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 54\sqrt{3}$ ব. ফু. $\times 5\sqrt{3}$ ফু. $= 810$ ঘনফুট।

উদা. 8. The base of a right prism is a trapezium whose parallel sides are 7 ft. and 13 ft., the perpendicular distance between those sides being 8 ft. If the height of the prism is 10 ft., find its volume.

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × লম্ব দূরত্ব $= \frac{1}{2}(7+13) \times 8$ ব. ফু.

$= 80$ বর্গফুট।

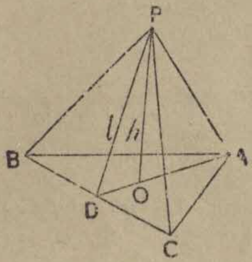
∴ প্রিজ্‌মটির ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 80$ ব. ফু. $\times 10$ ফু. $= 800$ ঘনফুট।

## [ Pyramid ]

**উদা. 9.** The base of a right pyramid, 6 in. high, is an equilateral triangle of side 4 inches. Find its volume and the area of the side faces.

মনে করা যাক পিরামিডের P শীর্ষ এবং ABC সমবাহু ত্রিভুজটি ভূমি। AD⊥BC হইলে AD ত্রিভুজের মধ্যমা। মনে কর O, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।




চিত্র 11

∴ PO, ABC সমতলের উপর লম্ব।

∴ PO, AD মধ্যমার উপর লম্ব।

মনে করা যাক PD $=l$ এবং PO $=h$,

∴ $h=6$ ইঞ্চি।

এখন $AD^2=AB^2-BD^2$

$=4^2-2^2=16-4=12$,

∴ $AD=\sqrt{12}$ ই. $=2\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

∴ $OD=\frac{1}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ই. $=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ইঞ্চি।

∴ $l^2=h^2+OD^2=36+\frac{4}{3}=\frac{112}{3}$ ব. ই.

∴ $l=\sqrt{\frac{112}{3}}$ ই. $=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ইঞ্চি।

পিরামিডের ঘনফল $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times6$ ঘ. ই. $=8\sqrt{3}$ ঘন ইঞ্চি।

তলসমূহের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা

$=\frac{1}{2}\times12\times\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ব. ই. $=8\sqrt{21}$ বর্গ ইঞ্চি।

**উদা. 10.** A right pyramid stands on a base 16 cm. square and its height is 15cm. ; find its slant surface and the volume.

এখানে ভূমি একটি বর্গক্ষেত্র ABCD এবং উহার প্রত্যেক বাহু 16 সে. মি.। মনে কর AC, BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং OP⊥AB ;

সুতরাং OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, এবং OP = AP = 8 সে. মি.। পিরামিডের উচ্চতা = 15 সে. মি. ;

∴ পিরামিডের তির্যক উচ্চতা $l = \sqrt{8^2+15^2}$ সে. মি. = 17 সে. মি.,

∴ উহার তির্যক তলগুলির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\times$ পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা

= $\frac{1}{2}\times$(16 সে. মি. × 4) × 17 সে. মি = 544 বর্গ সেন্টিমিটার।

আবার, উহার ঘনফল = $\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\frac{1}{3}\times$(16 × 16) বর্গ সে. মি. × 15 সে. মি.

= 1280 ঘন সেন্টিমিটার।

**উদা. 11.** Determine the volume of a pyramid whose height is $10\sqrt{7}$ ft. and which stands on a triangle of sides 16 ft., 11 ft. and 9 ft. [ C. U. '41 ]

ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $s = \frac{1}{2}(16+11+9)$ ফু. = 18 ফুট।

∴ উহার ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ব. ফু.

= $\sqrt{18(18-16)(18-11)(18-9)}$ ব. ফু.

= $\sqrt{18\times2\times7\times9}$ ব. ফু. = $18\sqrt{7}$ বর্গফুট

∴ নির্ণেয় ঘনফল = $\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\frac{1}{3}\times18\sqrt{7}$ ব. ফু. × $10\sqrt{7}$ ফুট

= 60 × 7 ঘ. ফু. = 420 ঘনফুট।

**উদা. 12.** A right pyramid stands on a square base of side 12 ft. Find the height of the pyramid, if its volume is 576 cu. ft. [ C. U. '43 ]

এখানে পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল = 12 × 12 ব. ফু. = 144 ব. ফু., এবং উহার ঘনফল = 576 ঘনফুট।

∴ নির্ণেয় উচ্চতা $= \dfrac{\text{ঘনফল}}{\frac{1}{3}\times\text{ভূমির ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{576 \text{ ঘ. ফু.}}{\frac{1}{3}\times144 \text{ ব. ফু.}} = 12$ ফুট।

উদা. 13. A pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 20 ft.; find the volume. [ S. A. ]

এখানে ভূমির ক্ষেত্রফল $=20$ ফু. $\times 20$ ফু. $=400$ বর্গফুট।

এখানে, পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, পিরামিডের ভূমি ABCD বর্গক্ষেত্র এবং শীর্ষ P বিন্দু। যদি AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে PO পিরামিডের উচ্চতা হইবে।

মনে কর, $OE \perp AB$, সুতরাং $OE = AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 20$ ফু. $=10$ ফুট।

এখন, OEP একটি সমকোণী ত্রিভুজ, উহার PE বাহু = প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 20$ ফুট $=10\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore \quad PO^2 = PE^2 - OE^2 = (10\sqrt{3})^2 - 10^2 = 200$

$\therefore \quad PO = \sqrt{200}$ ফুট $=10\sqrt{2}$ ফুট।

$\therefore$ পিরামিডটির ঘনফল $=\frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3} \times 400$ ব. ফু. $\times 10\sqrt{2}$ ফু. $=\frac{4000\sqrt{2}}{3}$ ঘ. ফু.

$=1885{\cdot}6$ ঘনফুট ( আসন্ন )।

উদা. 14. The faces of a tetrahedron are four equal equilateral triangles; find the area of the faces of the tetrahedron, if the length of a side of each triangle is 4 ft. Find also the volume of the tetrahedron. [ C. U. '38 ]

এখানে চতুস্তলকটির তির্যক উচ্চতা $=4$ ফুট বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $=\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4$ ফু. $=2\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore$ উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা

$=\frac{1}{2} \times 12$ ফু. $\times 2\sqrt{3}$ ফু. $=12\sqrt{3}$ ব. ফু.

এবং উহার ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ [ $a$ ত্রিভুজের বাহু ]

$=\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16$ ব. ফু. $=4\sqrt{3}$ বর্গফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=(12\sqrt{3}+4\sqrt{3})$ ব. ফু. $=16\sqrt{3}$ বর্গফুট।

মনে কর, ABCD চতুস্তলকের শীর্ষ D এবং $DE \perp BC$. $\therefore$ BC-র মধ্যবিন্দু E এবং $\triangle ABC$র মধ্যমা AE. মনে কর, G, $\triangle ABC$র ভরকেন্দ্র,

$\therefore$ DG = চতুস্তলকের উচ্চতা $h$. $\therefore$ $EG = \frac{1}{3}AE$.

এখন, $DE = AE = 2\sqrt{3}$, এবং $EG = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad h = \sqrt{DE^2 - EG^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\tfrac{2}{3}\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{6}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{4}{3}\sqrt{6}$ ঘ. ফু. $= \frac{16}{3}\sqrt{2}$ ঘন ফুট।

উদা. 15. Find the cost of painting the vertical sides of a wooden column, 10 ft. high and standing on a regular nonagon whose side is 6 inches, at 2 s. per sq. ft.

স্তম্ভটির ভূমি 6 ই. বা $\frac{1}{2}$ ফুট বাহুবিশিষ্ট সুষম নবভুজ।

$\therefore$ উহার ভূমির পরিসীমা $= \frac{1}{2}$ ফু. $\times 9 = \frac{9}{2}$ ফুট।

$\therefore$ উহার লম্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $= \frac{9}{2}$ ফু. $\times 10$ ফু. $= 45$ বর্গফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= 2$ শি. $\times 45 = 90$ শি. $= 4$ পা. 10 শি.

## Exercise 2

1. The base of a right prism, 9 in. high, is an equilateral triangle whose side is 1 ft. 4 in. Find the area of its lateral surfaces.

2. The base of a right prism is a triangle whose each side measures 6 cm. If the height of the prism is $16\sqrt{3}$ cm., find its volume.

3. The base of a right prism is an equilateral triangle whose each side is $a$. If the height of the prism is $h$, shew that its volume is $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$.

4. The volume of a right prism is 80 cu. ft. and its base is a triangle whose sides are 3 ft., 4 ft. and 5 ft. Find the height and the total surface of the prism.

5. The area of the lateral surface of a right prism is 1080 sq. ft. and its height is 12 ft. ; if the base is a regular nonagon, find the length of each side of the base.

6. Find the volume of a pyramid when its base is a regular hexagon, each side measuring 6 ft. and height 30 ft. [B. U.]

7. The base of a right prism is a trapezium whose parallel sides are 10 ft. and 12 ft. and the perpendicular distance between them is 10 ft. If the height of the prism is 8 ft., find its volume.

8. Find the total surface of a right prism, 18 ft. high and standing on a regular hexagon whose each side is 3 ft. long.

9. A pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 30 feet ; find the volume. [R. E.]

10. Find the area of the surface of a right prism, whose ends are squares of sides 3 inches, the height of the prism being one foot. [C. U. '36]

11. The base of a pyramid, 12 ft. high, is a rectangle $10' \times 15'$. Find the volume.

12. The base of a pyramid, 10 ft. high, is a regular hexagon of side 6 ft. Find the volume.

13. In a regular tetrahedron of side $a$, show that the height is equal to $\frac{1}{3}\sqrt{6}a$ and the volume is equal to $\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3$.

14. The base of a pyramid, 12 cm. high, is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm. and 17 cm. Find the volume of the pyramid. [C. U. '46, '48]

15. A right pyramid stands on a base 8 ft. square and its height is 3 ft. ; find its slant surface and volume.

16. The base of a right prism, 10 cm. high, is a triangle whose sides are 17 cm., 10 cm. and 9 cm. Find the volume and the whole surface of the prism. [C. U. '40]

17. The base of a right column, 12 ft. high, is a regular pentagon whose side is 4 inches. Find the cost of white-washing the vertical sides of the column at 4 annas per sq. ft.

18. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 cm. and 9 cm. and the length of the slant edges is 8·5 cm.; find the height and volume of the pyramid.

[ G. U. '48 ]

19. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 24 cm. and 18 cm. and each of the slant edges is 17 cm.; find the height and volume of the pyramid.

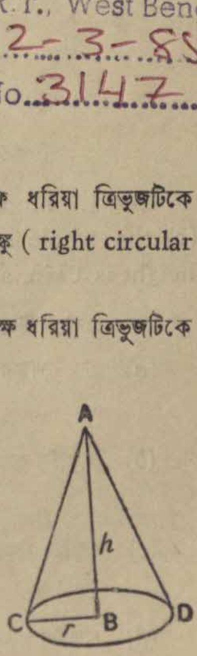
[ N. U. '47 ]



## Cone ( শঙ্কু )

4. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু ( right circular cone ) বলে।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠B সমকোণ। ABকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘোরান হইলে C বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই বৃত্তকে শঙ্কুর ভূমি ( base ) বলে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ BC, A বিন্দু শঙ্কুর শীর্ষ এবং ∠CAD ইহার শিরঃকোণ। AB, শঙ্কুর ভূমির উপর লম্ব। ABকে শঙ্কুর উচ্চতা এবং AC বা ADকে ইহার তির্যক উচ্চতা ( slant height ) বলে।




চিত্র 12

মোচার অগ্রভাগ, লিখিবার জন্য কাটা পেন্সিলের অগ্রভাগ শঙ্কুর দৃষ্টান্ত।

কোন লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা $h$ এবং উহার ভূমির ব্যাসার্ধ $r$ এবং তির্যক উচ্চতা $l$ হইলে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :—

(i) **শঙ্কুর বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল**

$=\frac{1}{2}\times$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l$

$=\pi rl$ বর্গ একক……(1)

$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গ একক……(2)

[ $\because$ $\angle ABC=1$ সমকোণ, $\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2$, $\therefore$ $l^2=h^2+r^2$ ]

(ii) **শঙ্কুর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** $=$ বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$+$ ভূমির ক্ষেত্রফল $=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$ বর্গ একক।

(iii) **শঙ্কুর ঘনফল** $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক।

## উদাহরণমালা 3

[ অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে $\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে ]

**উদা.** 1. Find (*a*) the slant height, (*b*) the curved surface, (*c*) the whole surface and (*d*) the volume of the cone whose height is 15 in. and the diameter of whose base is 16 in.

এখানে উচ্চতা $=15$ই., ব্যাসার্ধ $=8$ ইঞ্চি।

(*a*) $\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $(l)=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{15^2+8^2}$ ই.

$=17$ ইঞ্চি।

(*b*) শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 8\times 17$ ব. ই.

$=427\frac{3}{7}$ ব. ই.

(*c*) শঙ্কুটির সমগ্রতল $=\pi r(l+r)$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 8(17+8)$ ব. ই.

$=628\frac{4}{7}$ ব. ই.।

(*d*) শঙ্কুটির ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 8^2\times 15$ ঘন ই.

$=1005\frac{5}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 2. Find the vertical height and the slant height of a right circular cone whose curved surface is 704 sq. in. and the diameter of whose base is 2 ft. 4 in.

এখানে ভূমির ব্যাসার্ধ $=2$ফু. 4 ই. $\times \frac{1}{2}=14$ ইঞ্চি।

$\because$ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$,

$\therefore$ নির্ণেয় তির্যক উচ্চতা $l=\frac{\text{বক্রতল}}{\pi r}=\frac{704}{\frac{22}{7}\times 14}$ ই. $=16$ ইঞ্চি।

আবার, $\because l^2=h^2+r^2$, $\therefore h^2=l^2-r^2$, $\therefore h=\sqrt{l^2-r^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=\sqrt{16^2-14^2}$ ই. $=\sqrt{60}$ ই. $=2\sqrt{15}$ ইঞ্চি।

উদা. 3. The slant height of a right circular cone is 1 ft. 9 in. and its curved surface is 396 sq. in.; find the diameter of the base.

এখানে তির্যক উচ্চতা $l=1$ ফু. 9 ই. $=21$ ইঞ্চি

$\because$ বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$,

$\therefore$ নির্ণেয় $r=\frac{\text{বক্রতল}}{\pi l}=\frac{396 \text{ ব. ই.}}{\frac{22}{7}\times 21 \text{ই.}}=6$ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $=2r=12$ ই. $=1$ ফুট।

উদা. 4. The volume of a cone is 154 cu. ft. and its height is 12 ft. Find the radius of the base.

$\because \frac{1}{3}\pi r^2 h=$ শঙ্কুর ঘনফল

$\therefore$ এখানে $\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 12=154$ ঘন ফু.

$\therefore r^2=\frac{154\times 3\times 7}{22\times 12}$ ব. ফু. $=\frac{49}{4}$ ব. ফু. $=(\frac{7}{2})^2$ ব. ফু.,

$\therefore r=\frac{7}{2}$ ফুট। $\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=3$ফু. 6 ই.।

উদা. 5. The height of a conical tent is $7\frac{1}{2}$ ft. and it is to enclose 200 sq. yds. of ground. Find how much canvas will be required. [ R. M. A. ]

এখানে বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল $=200$ বর্গগজ,

অর্থাৎ $\pi r^2=200$ ব. গ., বা $\frac{22}{7}r^2=1800$ ব. ফু.

$\therefore\ r^2 = \frac{6300}{11}$ ব. ফু., $\therefore\ r = 30\sqrt{\frac{7}{11}}$ ফুট।

$\because\ l^2 = r^2 + h^2$, $\therefore$ এখানে $l^2 = \frac{6300}{11} + (\frac{15}{2})^2 = \frac{27675}{44}$ ব. ফু.

$\therefore\ l = \sqrt{\frac{27675}{44}}$ ফু. $= \frac{15}{2}\sqrt{\frac{123}{11}}$ ফুট

$\therefore$ নির্ণেয় বস্ত্রের পরিমাণ = তাঁবুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

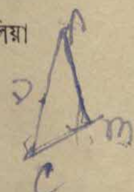
$= \pi r l = \frac{25}{7} \times \frac{30\sqrt{7}}{\sqrt{11}} \times \frac{15 \times \sqrt{123}}{2 \times \sqrt{11}}$ ব. ফু.

$= \frac{30 \times 15\sqrt{7} \times \sqrt{123}}{7} \times \frac{1}{9}$ ব. গ. $= \frac{50\sqrt{861}}{7}$ ব. গ.

$= 209{\cdot}5$ বর্গগজ ( প্রায় )।

উদা. 6. A right-angled triangle, of which the sides are 3 ft. 6 in. and 5 ft. in length, is made to turn round on the longer side ; find the volume of the solid thus formed. [S.A.]

এখানে বুঝা গেল 5 ফুট দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ঘুরান হইতেছে বলিয়া উৎপন্ন শঙ্কুটির উচ্চতা = 5 ফুট ;



সুতরাং অপর বাহুটি ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{2}$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (\frac{7}{2})^2 \times 5$ ঘ. ফু.

$= \frac{385}{6} =$ ঘ. ফু. $= 64\frac{1}{6}$ ঘনফুট।

উদা. 7. The sides of a right-angled triangle are 3 in. and 4 in. respectively ; find the volume of the cone formed by the revolution of the triangle round the hypotenuse. [S.A.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং $AB = 4$ ই. ও $BC = 3$ ই.।

$\therefore\ AC = \sqrt{4^2 + 3^2}$ ই. $= 5$ ইঞ্চি। $BD \perp AC$ টান।

$\because$ BD সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব,

$\therefore\ \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC}$, বা $\frac{BD}{4} = \frac{3}{5}$, $\therefore\ BD = \frac{12}{5}$ ইঞ্চি।

এক্ষণে AC বাহুকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি ঘুরাইলে দুইটি শঙ্কু উৎপন্ন হয়। একটির ব্যাসার্ধ BD ও উচ্চতা AD এবং অন্যটির ব্যাসার্ধ BD ও উচ্চতা CD.

$\therefore$ ঐ দুই শঙ্কুর মোট ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi \times BD^2 \times AD + \frac{1}{3}\pi \times BD^2 \times CD$

$=\frac{1}{3}\pi \times BD^2(AD+CD)=\frac{1}{3}\pi BD^2.AC=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(\frac{12}{5})^2\times 5$ ঘ. ই.

$=\frac{1056}{35}$ ঘ. ই. $=30\frac{6}{35}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 8. A right-angled triangle, whose remaining angles are 60° and 30°, revolves about its hypotenuse, which is 12 in. long ; find the volume of the solid thus formed.

$\because$ সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ, $\therefore$ ক্ষুদ্রতম বাহুটি ( 30° কোণের বিপরীত বাহু ) অতিভুজের অর্ধেক। [ উদা. 7এর মত চিত্র আঁক ] এখানে BC = 6 ইঞ্চি, AC = 12 ই.,

$\therefore$ $AB^2=AC^2-BC^2=12^2-6^2=108$ ব. ই., $\therefore$ $AB=6\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

$\because$ $\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}$, $\therefore$ এখানে $\frac{BD}{6\sqrt{3}}=\frac{6}{12}$, $\therefore$ $BD=3\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi \times BD^2(AD+DC)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(3\sqrt{3})^2\times 12$ ঘ. ই.

$=\frac{2376}{7}$ ঘ. ই. $=339\frac{3}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 9. A conical tent is required to accommodate 5 people ; each person must have 16 sq. ft. of space on the ground, and 100 cu. ft. of air to breathe ; give the vertical height, slant height, and the width of the tent. [R.U.S.]

এখানে তাঁবুর ভূমির বিস্তার বা ব্যাস $2r$, উহার উচ্চতা $h$ এবং তির্যক উচ্চতা $l$ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে 5 জনের জন্য মোট স্থান লাগে $16\times 5$ বা 80 ব. ফু.

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\pi r^2=80$ ব. ফু., বা $\frac{22}{7}r^2=80$ ব. ফু.,

বা, $r^2=\frac{80\times 7}{22}$ ব. ফু. $=\frac{280}{11}$ ব. ফু., $\therefore$ $r=\sqrt{\frac{280}{11}}$ ফু. $=5.045\cdots$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় তাঁবুর বিস্তার $=2r=2\times 5.045\cdots$ ফু. $=10.09$ ফুট ( প্রায় )।

আবার, প্রদত্ত তাঁবুর ঘনফল $= 100$ ঘ. ফু. $\times 5 = 500$ ঘ. ফু.

অর্থাৎ $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 500$ ঘ. ফু., বা $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{280}{11} \times h = 500$ ঘ. ফু.

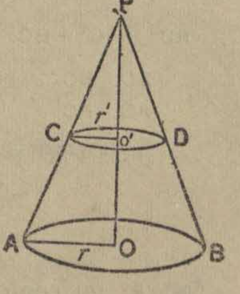
$\therefore\ h = \frac{75}{4}$ ফু. $= 18\frac{3}{4}$ ফুট।

এক্ষণে, $\because\ l^2 = r^2 + h^2 = \frac{280}{11} + (\frac{75}{4})^2 = \frac{66355}{176}$

$\therefore\ l = \sqrt{\frac{66355}{176}}$ ফু. $= 19{\cdot}4$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 10. Divide a right circular cone into two parts by a plane drawn parallel to the base so that the curved surfaces of the two parts are equal. [ C. U. '47 ]

মনে করা যাক, APB একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু, AB বৃত্ত ইহার ভূমি, O ভূমির কেন্দ্র এবং $r$ ব্যাসার্ধ। মনে করা যাক, AP রেখার C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া একটি সমতল আঁকিলে CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল বাকি অংশ ACDBর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে, অর্থাৎ CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। আবার, C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া সমতল আঁকিলে উহা শঙ্কুকে একটি বৃত্তে ছেদ করিবে। মনে করা যাক, O′ এবং $r'$ যথাক্রমে এই বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ।




চিত্র 13

এখন PCO′ এবং PAO ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

$$\therefore\ \frac{CO'}{AO} = \frac{PC}{PA},\ \text{অর্থাৎ}\ \frac{r'}{r} = \frac{PC}{PA},$$

$$\therefore\ \frac{\text{CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}}{\text{APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}} = \frac{\pi r' PC}{\pi r PA} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{PC}{PA}$$

$$= \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{PC^2}{PA^2} = \frac{1}{2}, \quad \therefore\ PC^2 = \frac{1}{2}PA^2 = PA.\frac{1}{2}PA$$

$\therefore$ PC রেখা PA এবং $\frac{1}{2}$PAর মধ্যসমানুপাতী হইল।

উদা. 11. A right circular cone 20 ft. high has its upper part cut off by a plane passing through the middle point of its axis. If the plane of section be at right angles to the axis and if the radius of the original cone be 4 ft., find the volume of the truncated cone. [ C. U. 1936 ]

প্রদত্ত শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 20$ ঘ. ফু. $=\frac{320}{3}\pi$ ঘ. ফু.।

উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়া অক্ষের সহিত লম্বভাবে একটি সমতলের দ্বারা শঙ্কুটিকে বিভক্ত করায় উপর দিকের ছিন্ন শঙ্কুর উচ্চতা হইল $\frac{1}{2}\times 20$ ফু. বা 10 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ হইল $\frac{1}{2}\times 4$ ফু. বা 2 ফুট।

$\therefore$ ছিন্ন শঙ্কুর নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi\times 2^2\times 10$ ঘ. ফু. $=\frac{40}{3}\pi$ ঘ. ফু.

$\therefore$ প্রদত্ত শঙ্কুর ছিন্ন খণ্ডের ঘনফল

$=\frac{320}{3}\pi-\frac{40}{3}\pi=\frac{280}{3}\times\frac{22}{7}$ ঘ. ফু. $=293\frac{1}{3}$ ঘনফুট।

## Exercise 3

1. The height and the diameter of the base of a right circular cone are 12 in. and 10 in. respectively. Find (1) the slant height, (2) the curved surface, (3) the whole surface and (4) the volume of the cone.

2. Find the vertical height and the slant height of a right circular cone whose curved surface is 330 sq. in. and the diameter of whose base is 7 in.

3. The height and radius of the base of a cone are 12 cm. and 5 cm. respectively. Find the curved surface and the volume of the cone.

4. Find the radius of the base of a right circular cone whose volume is 1232 cu. ft. and height 24 ft.

5. The slant height of a right circular cone is 1 ft. 2 in. and its curved surface is 264 sq. in. Find the diameter of the base.

6. The height and the radius of the base of a cone are 15 cm. and 8 cm. respectively ; find its curved surface and the volume of the cone.

7. How much canvas will make a conical tent 11 ft. in height and 12 ft. in diameter at the base ?

8. A right-angled triangle, of which the sides are 3 in. and 4 in. in length, is made to turn round on the longer side. Find the volume of the cone thus formed. [ S. A. ]

9. A right-angled triangle of sides equal to 20 in., 16 in. and 12 in. respectively is made to spin round on its hypotenuse an axis. Find the volume of the double cone thus formed. [ R. E. ]

10. A cone 3 ft. high and 2 ft. in diameter at the bottom is placed on the ground and sand is poured over it until a conical heap is formed 5 ft. high and 30 ft. in circumference at the bottom. Find how many cubic feet of sand there are.

11. Find the lateral surface and the volume of a right circular cone of height 15 ft., the radius of whose base is 8 ft. [ C.U. '42 ]

12. Find the volume and the area of the slanting surface of a right circular cone of height 4 ft. and the radius of whose base is 3 feet. $(\pi = \frac{22}{7})$. [ C. U. '39 ]

# দ্বিতীয় অধ্যায়

# ALGEBRA ( বীজগণিত )

## Elimination ( অপনয়ন )

5. **অপনয়ন ও অপনীতক।** অপনয়ন অর্থে বর্জন বুঝায়। কতিপয় প্রদত্ত সমীকরণ হইতে এক বা একাধিক বীজগণিতীয় রাশি অপনয়ন করিতে ( eliminate ) হইলে ঐ সমীকরণগুলির সাহায্যে ঐ রাশিবর্জিত একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়।

ঐ রাশিবর্জিত যে সমীকরণটি গঠিত হয় তাহাকে **অপনীতক** ( eliminant ) বলা হয়।

**অপনয়ন প্রণালী।** মনে কর, $2x+a=0$ ও $3x+4b=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে $x$ অপনয়ন করিতে হইবে।

$$\text{এক্ষণে, } \because\ 2x+a=0,\quad \therefore\ x=-\frac{a}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\text{আবার, } \because\ 3x+4b=0,\quad \therefore\ x=-\frac{4b}{3}\cdots\cdots(2)$$

$\therefore\ -\frac{a}{2}=-\frac{4b}{3}$, বা $3a-8b=0$. এই সমীকরণে $x$ নাই ( অর্থাৎ ইহা $x$-বর্জিত ) এবং ইহা প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে গঠিত হইয়াছে, সুতরাং ইহাই এখানে অপনীতক। এই $3a-8b=0$ সমীকরণটিকে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির $x$-অপনীতক ( $x$-eliminant ) বলে।

**সাধারণ নিয়ম।** দুইটি সমীকরণ হইতে একটি রাশি ($x$ বা $y$) অপনয়ন করিবার জন্য প্রথমে প্রত্যেক সমীকরণ হইতে ঐ রাশির মান নির্ণয় করিবে।

এইরূপে সমীকরণ দুইটি হইতে ঐ রাশির যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে তাহারা যদি সমান হয়, কেবল তবেই ঐ মান দ্বারা সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হয়। অতএব, ঐ লব্ধ মান দুইটিকে সমিত করিয়া যে সমীকরণটি পাওয়া যাইবে তাহাই ঐ সমীকরণদ্বয়ের ঐ রাশি-অপনীতক হইবে।

এখানে বুঝা গেল যে, ঐ লব্ধ অপনীতকটি হইল প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি যুগবৎ সিদ্ধ হইবার সর্ত।

**অপনয়নে সমীকরণ-সংখ্যা।** উপরের উদাহরণে দেখা যাইতেছে যে, একটি রাশি ($x$) অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ প্রয়োজন হইয়াছে। এ সম্বন্ধে সাধারণতঃ যতগুলি রাশি অপনয়ন করিতে হইবে প্রদত্ত সমীকরণের সংখ্যা তাহা অপেক্ষা এক অধিক হওয়া আবশ্যক।

একটি রাশি অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ আবশ্যক। কারণ একটি সমীকরণ হইতে ঐ রাশির যে মান পাওয়া যায় তাহা আর একটি সমীকরণে ঐ রাশির পরিবর্তে বসাইয়া তবে ঐ রাশি-বর্জিত সমীকরণটি পাওয়া যাইবে।

অনুরূপে দুইটি রাশি অপনয়নের জন্য তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন হয়। কারণ, এখানে যে কোন দুইটি সমীকরণ হইতে ঐ অপনেয় রাশি দুইটির যে মান পাওয়া যাইবে, তৃতীয় সমীকরণে ঐ রাশি দুইটির ঐ মান বসাইলে তবে ঐ রাশিদ্বয়-বর্জিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

কিন্তু যদি প্রদত্ত সমীকরণগুলি অপনেয় রাশিগুলির **সমমাত্র সমীকরণ** ( homogeneous equation ) হয় তবে সমীকরণের সংখ্যা অপনেয় রাশি-সংখ্যার সমান হইলেও চলিবে।

মনে কর, $4x+my=0$ এবং $nx+3y=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে $x$ ও $y$ অপনয়ন করিতে হইবে।

এখন দেখ, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিকে $y$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই
$4.\frac{x}{y}+m=0\cdots(1)$ এবং $n.\frac{x}{y}+3=0\cdots(2)$

(1) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{m}{4}$ এবং (2) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{3}{n}$,

$\therefore\ -\frac{m}{4}=-\frac{3}{n}$, বা $mn=12$.

অতএব অপনীতকটি হইল $mn=12$.

[ দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে $\frac{x}{y}$কে একটি মাত্র রাশি ধরিয়া উহাকে অপনীত করা হইয়াছে। ]

## উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Eliminate $x$ from the equations $a_1x+b_1=0$ and $a_2x+b_2=0$.

$\because\ a_1x+b_1=0,\quad \therefore\ x=-\frac{b_1}{a_1}$.

আবার $\because\ a_2x+b_2=0,\ \therefore\ x=-\frac{b_2}{a_2}$.

$\therefore\ -\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2},\ \therefore\ a_1b_2-b_1a_2=0$ হইল নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 2. Eliminate $x$ and $y$ from the equations $a_1x+b_1y=0$ and $a_2x+b_2y=0$.

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $y$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $a_1\frac{x}{y}+b_1=0\cdots(1)$

এবং $a_2\frac{x}{y}+b_2=0\cdots(2)$. (1) হইতে পাই $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$.

$\therefore$ (2)-এ $\frac{x}{y}$এর মান বসাইয়া পাই

$a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2=0$, বা, $a_1b_2-a_2b_1=0$.

উদা. 3. Eliminate $x$, $y$, $z$ from the equations

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$

তোমরা বজ্রগুণন প্রণালীতে সমীকরণ সমাধানের প্রণালী পূর্বে শিখিয়াছ।

এখানে (2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}.$$

মনে কর, প্রত্যেক অনুপাত $=k$.

$\therefore\ x=k(b_2c_3-b_3c_2),\ y=k(c_2a_3-c_3a_2),\ z=k(a_2b_3-a_3b_2).$

এক্ষণে (1) হইতে $x$, $y$, $z$ এর মান বসাইয়া পাই,

$k\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0,$

$\therefore\ a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

[ দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে উপরে প্রদত্ত আকারে পরিণত করিয়া লওয়া যায়। ]

উদা. 4. Eliminate $m$ and $n$ from the equations $mx+ny=a$, $nx-my=b$, $m^2+n^2=1$.

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ দুইটির বর্গ করিয়া পাই

$m^2x^2+n^2y^2+2mnxy=a^2\cdots\cdots(1)$

এবং $n^2x^2+m^2y^2-2mnxy=b^2\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া পাই $x^2(m^2+n^2)+y^2(n^2+m^2)=a^2+b^2$.

$\therefore$ eliminant হইল $x^2+y^2=a^2+b^2$ [ $\because m^2+n^2=1$ ],

উদা. 5. Eliminate $p$ from the equations

$$x^2=p^2+\frac{1}{p^2} \text{ and } y=p+\frac{1}{p}.$$

এখানে $y^2=\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=p^2+\frac{1}{p^2}+2=x^2+2$

$\therefore$ নির্ণেয় eliminant হইল $y^2-x^2=2$.

উদা. 6. Eliminate $x$ from the equations $ax^2+bx+c=0$ and $a_1x^2+b_1x+c_1=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x^2}{bc_1-b_1c}=\frac{x}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b},$$

$$\therefore\ x^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b} \text{ এবং } x=\frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b},$$

$$\therefore\ \frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{(ca_1-c_1a)^2}{(ab_1-a_1b)^2},$$

$$\therefore\ (ca_1-c_1a)^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}\times(ab_1-a_1b)^2$$

$$=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b), \text{ ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।}$$

উদা. 7. Eliminate $x$ and $y$ from the equations $x-y=a\cdots\cdots(1)$, $x^2-y^2=b^2\cdots\cdots(2)$ and $x^3-y^3=c^3\cdots\cdots(3)$.

$$\because\ x^2-y^2=b^2,\quad \therefore\ (x+y)(x-y)=b^2,$$

$$\text{বা, } (x+y)\times a=b^2,\quad \therefore\ x+y=\frac{b^2}{a}\cdots\cdots(4).$$

(1) এর বর্গ করিয়া পাই $x^2+y^2-2xy=a^2\cdots(5)$

এবং (4) ,, ,, ,, ,, $x^2+y^2+2xy=\frac{b^4}{a^2}\cdots(6)$.

(6) – (5) করিয়া পাই $4xy=\frac{b^4-a^4}{a^2}$, $\therefore\ xy=\frac{b^4-a^4}{4a^2}$.

এক্ষণে (3) হইতে পাই $c^3=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=a\{(x+y)^2-xy\}$$

$$=a\left\{\frac{b^4}{a^2}-\frac{b^4-a^4}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left(\frac{3b^4+a^4}{4a^2}\right)=\frac{3b^4+a^4}{4a},$$

$$\therefore\ 3b^4+a^4=4ac^3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল $a^4+3b^4-4ac^3=0$.

উদা. 8. Eliminate $\cos\theta$ and $\sin\theta$ between the equations $x\cos\theta+y\sin\theta=a$ and $x\sin\theta-y\cos\theta=b$.

$\because\ x\cos\theta+y\sin\theta=a,$

$\therefore\ x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta+2xy\cos\theta\sin\theta=a^2\cdots\cdots(1)$

আবার, $\because\ x\sin\theta-y\cos\theta=b,$

$\therefore\ x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta=b^2\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$x^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+y^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+b^2$$

$\therefore\ x^2+y^2=a^2+b^2\quad(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1).$

উদা. 9. Show that $p^2+q^2+r^2-4=pqr$ is the eliminant of the equations $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=p,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=q,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=r.$

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি গুণ করিয়া পাই

$$2+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)=pqr,$$

বা, $2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)^2-2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-2=pqr,$

বা, $2+r^2-2+p^2-2+q^2-2=pqr,$

$\therefore\ p^2+q^2+r^2-4=pqr.$

অতএব প্রমাণিত হইল যে,

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির অপনীতক $p^2+q^2+r^2-4=pqr.$

উদা. 10. Find the eliminant of the following equations

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a\cdots\cdots(1)\\ xy+yz+zx&=b\cdots\cdots(2)\\ x^3+y^3+z^3&=c\cdots\cdots(3)\\ xyz&=d\cdots\cdots(4)\end{aligned}\right\}$$

(3) ও (4) হইতে পাই $x^3+y^3+z^3-3xyz=c-3d.$

$\therefore \quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=c-3d,$

বা, $a\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}=c-3d,$

বা, $a(a^2-3b)=c-3d,$

$\therefore \quad a^3-3ab+3d-c=0,$ ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 11. Eliminate $x$ from $ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots(1)$ and $x^3+x+d=0 \cdots\cdots(2)$.

প্রথম সমীকরণকে $x$ দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে $a$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$ax^3+bx^2+cx=0 \cdots\cdots(3)$$

$$ax^3+ax+ad=0 \cdots\cdots(4)$$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $bx^2+(c-a)x-ad=0 \cdots(5).$

এক্ষণে (1) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x^2}{-abd-c(c-a)}=\frac{x}{bc+a^2d}=\frac{1}{a(c-a)-b^2}$$

$\therefore \quad (bc+a^2d)^2=(abd+c^2-ac)(a^2+b^2-ac).$ [উদা. 6 দেখ ]

## Exercise 1

Eliminate $x$ from the following equations :—

1. $\left.\begin{array}{r} x+b=0 \\ 3x+2a=a \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{r} 2x-m=0 \\ nx-5=0 \end{array}\right\}$

3. $ax+b=0,\ a'x+b'=0.$

4. $ax^2-2a^2x+1=0,\ a^2+x^2=3ax.$

5. $x^2+ax+b=0,\ x^3+cx+d=0.$

6. $x+\frac{1}{x}=a+b, \quad x-\frac{1}{x}=a-b.$

7. $x^2+x+a=0,\ bx+c=0.$

8. $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=a,\ x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=b.$

Eliminate $x$ and $y$ from the following equations :—

9. $2x+ay=0,\ bx+3y=0.$

10. $x-y=a,\ x^2+y^2=b,\ xy=c.$

11. $x^2-y^2=ax-by,\ x^2+y^2=1,\ 4xy=bx+ay.$

12. $x+y=p,\ x^2+y^2=q,\ x^3+y^3=r.$

13. $x+y=m,\ x^3+y^3=n,\ xy=l.$

14. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4.$

Eliminate $x, y, z$ from the following equations :—

15. $ax+by+cz=0,\ a_1x+b_1y+c_1z=0,\ a_2x+b_2y+c_2z=0.$

16. $bx+ay-z=0,\ cx+az-y=0,\ cy+bz-x=0.$

17. $xy=c^2,\ yz=a^2,\ zx=b^2, x^2+y^2+z^2=d^2.$

18. $\dfrac{x}{a}=y+z,\ \dfrac{y}{b}=z+x,\ \dfrac{z}{c}=x+y.$

19. Eliminate $m$ and $n$ from the equations.

$mx-ny=a(m^2-n^2),\ nx+my=2amn,\ m^2+n^2=1.$

20. Show that $a^2+b^2+c^2-abc=4$ is the eliminant of $x^2+y^2=cxy,\ y^2+z^2=ayz,\ z^2+x^2=bzx.$

## Progression ( প্রগতি )

6. **শ্রেণী**। যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত পর পর রাশি বা পদগুলি এরূপ হয় যে উহাদের যে কোনও একটিকে উহার পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই রাশিমালাকে **শ্রেণী** ( series ) বলে। যথা, 3, 5, 7, 9 প্রভৃতি রাশি, অথবা 3, 6, 12, 24 প্রভৃতি রাশি এক একটি শ্রেণী গঠন করিয়াছে।

## সমান্তর শ্রেণী ( Arithmetical Progression )

7. **সমান্তর শ্রেণী**। যদি কোন শ্রেণী এরূপ হয় যে, উহার অন্তর্গত যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে তবে সেই শ্রেণীকে **সমান্তর শ্রেণী** (A. P.) বলে।

আর ঐ সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** ( common difference ) বলে। যথা, (i) 1, 3, 5, 7···একটি সমান্তর শ্রেণী ; কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর 2. (ii) 10, 7, 4, 1···ইহাও একটি সমান্তর শ্রেণী ; কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে কমিয়া গিয়াছে। এস্থলে সাধারণ অন্তর $-3$.

8. **সাধারণ অন্তর নির্ণয়**। সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করা হয়। যথা,

(1) 2, 6, 10, 14···শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $=6-2=4$

(2) 7, 4, 1, $-2$···শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=4-7=-3$

(3) $a, a+b, a+2b\cdots$ শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=(a+b)-a=b,$

(4) $a, a-b, a-2b\cdots$ শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=(a-b)-a=-b.$

**9. সাধারণ পদ, শেষ পদ ও পদসংখ্যা।** মনে কর 4, 6, 8, 10, 12, 14 একটি সমান্তর শ্রেণী, ইহার শেষ পদ=14, পদসংখ্যা=6 ; এস্থলে 14 কে ষষ্ঠ পদও বলা যায়। এইরূপ যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে কতকগুলি পদ থাকে তবে তাহার সপ্তম, দশম প্রভৃতি পদকে বিশেষ পদ বলে, আর ঐ শ্রেণীর $n$-তম পদকে ( $n$th term কে ) সাধারণ পদ ( general term) বলে।

এস্থলে যদি $n$-তম পদে শ্রেণীটি শেষ হয়, তবে $n$-তম পদই শেষ পদ (last term ) হইবে এবং পদসংখ্যা হইবে $n$. এই $n$ একটি পূর্ণসংখ্যা ও ধনসংখ্যা হইবে—ইহা কখনও ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হইবে না।

সাধারণতঃ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদকে $a$, সাধারণ অন্তরকে $b$, শেষ পদকে $l$, পদসংখ্যাকে $n$ এবং পদগুলির যোগফলকে $s$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার $t_1$ দ্বারা ১ম পদ, $t_2$ দ্বারা ২য় পদ, $t_3$ দ্বারা ৩য় পদ,$\cdots t_n$ দ্বারা $n$-তম পদকে নির্দেশ করা যায়।

**10. সমান্তর শ্রেণীর $n$-তম পদ নির্ণয়।** কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $b$ হইলে,

$t_1$ ( ১ম পদ )$=a \quad\quad =a+(1-1)b,$

$t_2$ ( ২য় পদ )$=a+b \;=a+(2-1)b,$

$t_3$ ( ৩য় পদ )$=a+2b=a+(3-1)b,$

$t_4$ ( ৪র্থ পদ )$=a+3b=a+(4-1)b,$ ইত্যাদি।

এক্ষেত্রে দেখা যাইতেছে যে, যে কোন পদে $b$-র সহগ হইবে সেই পদ-সংখ্যা অপেক্ষা এক কম। প্রথম পদ $a$-র সহিত ঐরূপ সহগযুক্ত $b$ যোগ করিলেই যে কোন পদ পাওয়া যায়।

অতএব, যে কোন শ্রেণীর $\boldsymbol{t_n=a+(n-1)b}$.

ঐ শ্রেণীতে যদি মোট $n$ সংখ্যক পদ থাকে তবে $t_n$ হইবে শেষ পদ, তখন $\boldsymbol{l=a+(n-1)b}$.

## উদাহরণমালা 2

**উদা. 1.** Find the 12th term of an A.P. whose first term is 3 and the common difference is 2.

এখানে $a$ ( ১ম পদ ) $=3$, $b$ ( সাধারণ অন্তর ) $=2$ এবং $n$ ( পদসংখ্যা ) $=12$. $\because \ t_n=a+(n-1)b$,

$\therefore$ নির্ণেয় পদ অর্থাৎ $t_{12}=3+(12-1)\times 2=3+22=25$.

**উদা. 2.** Find the 15th term of the series, 6, 8, 10,…

এস্থলে ১ম পদ $a=6$, সাধারণ অন্তর $b=8-6=2$, পদসংখ্যা $n=15$.

এক্ষণে, $t_n=a+(n-1)b$ এই সূত্র হইতে পাই,

$$t_{15}=6+(15-1)\times 2=6+28=34.$$

**উদা. 3.** Find the 20th term of the series 10, 7, 4,…

এখানে ১ম পদ $a=10$ ; সা. অন্তর $b=7-10=-3$, পদসংখ্যা $n=20$.

$$\therefore \ t_{20}=a+(n-1)b=10+(20-1)\times -3=10+19\times -3.$$
$$=10-57=-47.$$

**উদা. 4.** The first term of an A. P. is 1 and the 18th term is 52; find the common difference.

মনে কর, সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_{18}=52$, অর্থাৎ $a+(18-1)b=52$

বা, $1+17b=52$ [ $\because \ a=1$ ], বা $17b=51$, $\therefore \ b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

**উদা. 5.** Find the 21st term of a series whose 7th and 13th terms are 23 and 41 respectively.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_7=23$ অর্থাৎ $a+6b=23\cdots(1)$

এবং $t_{13}=41$ অর্থাৎ $a+12b=41\cdots(2)$.

এক্ষণে, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $6b=18$, $\therefore \ b=3$.

আবার, (1) হইতে পাই $a+18=23$, $\therefore\ a=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_{21}=a+20b=5+20\times3=5+60=65$.

**উদা. 6.** Find the series whose 5th and 12th terms are 8 and $-6$ respectively.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

অতএব, প্রদত্ত সর্ত হইতে $a+4b=\ \ 8\cdots(1)$

এবং $a+11b=-6\cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ) $-7b=14$, $\therefore\ b=-2$.

এখন (1) হইতে পাই $a+4\times\ -2=8$, $\therefore\ a=16$.

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $=16, 14, 12, 10,\cdots$

**উদা. 7.** Which term of the series $2, 5, 8,\cdots$ is 59 ?

মনে কর, $59=n$-তম পদ। এখানে $a=2$, $b=5-2=3$.

$\therefore\ a+(n-1)b=59$,

বা, $2+(n-1)\times3=59$, বা, $3(n-1)=57$,

বা, $n-1=19$, $\therefore\ n=20$. অতএব শ্রেণীটির 20শ পদ 59.

**উদা. 8.** Is 46 a term of the series $1, 4, 7,\cdots$?

যদি সম্ভব হয় মনে কর 46 প্রদত্ত শ্রেণীর $n$-তম পদ। এখানে $a=1$, এবং $b=4-1=3$. এক্ষণে, $a+(n-1)b=46$, বা $1+(n-1)\times3=46$,

বা, $3(n-1)=45$, বা $n-1=15$, $\therefore\ n=16$.

অতএব, 46 শ্রেণীটির ষোড়শ পদ।

**উদা. 9.** If the $p$th and $q$th terms of an A. P. are respectively $q$ and $p$, find the first term and the common difference.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ সর্ত হইতে পাই, $a+(p-1)b=q\cdots(1)$

এবং $a+(q-1)b=p\cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ) $(p-q)b=q-p$, $\therefore\ b=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$.

এখন (1) হইতে পাই, $a+(p-1)\times -1=q$, বা $a-p+1=q$.

$\therefore \quad a=p+q-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম পদ $=p+q-1$ এবং সাধারণ অন্তর $=-1$.

উদা. 10. The $m$th term of an A. P. is $n$ and the $n$th term is $m$. Find the $p$th term of it. [ C. U. '47 ; E. B. S. B. '51]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ সর্ত হইতে পাই $a+(m-1)b=n\cdots(1)$

এবং $a+(n-1)b=m\cdots(2)$

$\therefore$ ( বিয়োগ ) $(m-n)b=n-m$, $\quad \therefore \quad b=\dfrac{n-m}{m-n}=-1.$

এখন (1) হইতে পাই $a+(m-1)\times(-1)=n$,

বা, $a-m+1=n$, $\therefore \quad a=m+n-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় $p$-তম পদ $=a+(p-1)b=m+n-1+(p-1)\times(-1)$

$=m+n-1-p+1=m+n-p.$

উদা. 11. If $a$ be the first term and $l$ the last term of an A. P., show that the sum of the $p$th term from the beginning and the $p$th term from the end is $a+l$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ গোড়ার দিক হইতে $p$-তম পদ $=a+(p-1)b$

এবং শেষ দিক হইতে পূর্বের $p$-তম পদ $=l-(p-1)b$

$\therefore$ ঐ দুই পদের সমষ্টি $=a+(p-1)b+l-(p-1)b=a+l.$

[ দ্রষ্টব্য : গোড়ার দিক হইতে পদগুলি যে ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, শেষ দিক হইতে ঠিক সেইভাবে কমিয়া গিয়াছে। $\therefore$ যদি গোড়ার দিক হইতে কোন পদ $a+rd$ হয়, তবে শেষ দিক হইতে ঐ সংখ্যক পদ $l-rd$ হইবে। ]

## Exercise 2

1. The first term of an A. P. is 6 and the common difference is 2. Find the 15th term. [C. U. '22]

2. Find the common difference of an A. P. of which the 1st term is 1 and the 10th term is 10. [C. U. '25]

3. The first term of an A. P. is 2 and the 20th term is 59. Find the common difference. [C. U. '24]

4. Find the series in A. P. of which the first term and the common difference are $a$ and $d$ respectively.

5. Find the series in A. P. of which the 1st term is 5 and the common difference is $-3$.

6. Find the 15th term of the series 16, 13, 10,……

7. Find the 12th and $r$th terms of the series 2, 5, 8,…

8. Find the 20th and the $n$th terms of the series 8, 6, 4,…

9. Find the 10th term of the series $1+\frac{5}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots\cdots$

10. Find the $n$th term of the series (*i*) $a, (a+\frac{1}{n}), (a+\frac{2}{n}), \cdots$ and of (*ii*) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{2n+1}{n}, \cdots\cdots$ [C. U. 1886]

11. Which term of the series 6, 10, 14,……is 38 ?

12. Which terms of the series 10, 8, 6,…are 0 and $-10$ ?

13. Is 29 a term of the series 3, 6, 9,…… ?

14. Is $6\frac{3}{5}$ a term of the series $\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \cdots$ ?

15. The second term of an A. P. is 6 and the fourth term is 14. Find the 10th term. [ C. U. '29 ]

16. Find the 20th term of an A. P. of which the 5th and the 12th terms are $-4$ and $-25$ respectively.

17. Find the first and the 10th terms of the A. P. whose 5th and 13th terms are 5 and $-3$ respectively.

18. Find the series in A. P. of which the $p$th term is $3p-1$.

**19.** If the $p$th and $q$th terms of an A. P. be respectively $c$ and $d$, find the first term and the common difference.

[C. U. '34]

**20.** If the $m$th term of an A. P. is $n$ and the $n$th term is $m$, find the $(m+n)$th term.

**21.** If the $p$th term of an A. P. is $a$ and the $q$th term is $b$, find the $r$th term.

**22.** Prove that in an A. P. the sum of two equidistant terms from the beginning and the end is constant.

## সমান্তরীয় মধ্যক ( Arithmetic Mean )

**11. সমান্তরীয় মধ্যক।** (1) যদি পর পর তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যপদটিকে সমান্তরীয় মধ্যক বলে। যথা, $a$, $b$, $c$ সমান্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদ হইলে $b$কে $a$ ও $c$-এর সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (2) যদি কতকগুলি পদ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যে ততগুলি সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয়। যথা : $a, m_1, m_2, m_3, \cdots m_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইলে, $m_1, m_2, \cdots, m_n$ পদগুলিকে $a$ ও $b$র মধ্যবর্তী $n$ সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (3) সমান্তরীয় মধ্যককে সংক্ষেপে ইংরাজীতে A. M. লেখা যায়।

### উদাহরণমালা 3

**উদা. 1.** Find the Arithmetic mean between $a$ and $b$.

[ C. U. '48 ]

মনে কর, সমান্তরীয় মধ্যকটি $m$, $\therefore$ $a, m, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $m-a=b-m$ ( উভয় পক্ষ সাধারণ অন্তরের সমান বলিয়া )

বা, $2m=a+b$, $\therefore$ $m=\frac{a+b}{2}$.

[ দ্রষ্টব্য : যে কোন দুইটি পদের সমষ্টির অর্ধেক, ঐ পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক হইবে। ]

উদা. 2. Find $n$ arithmetic means between $a$ and $b$.

$\because$ $a$ ও $b$র মধ্যে $n$ সংখ্যক মধ্যক আছে,

$\therefore$ $a$ ও $b$র মধ্যবর্তী $n$ মধ্যকগুলি লইয়া এমন একটি সমান্তর শ্রেণী হইল যাহার পদসংখ্যা $=n+2$, প্রথম পদ $a$, এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ $=b$. মনে কর সাধারণ অন্তর $=d$.

$\because$ $(n+2)$-তম পদ $=b$, $\therefore$ $a+(n+2-1)d=b$,

বা, $a+(n+1)d=b$, বা, $(n+1)d=b-a$, $\therefore$ $d=\frac{b-a}{n+1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি

$$=(a+\tfrac{b-a}{n+1}),\ (a+2.\tfrac{b-a}{n+1}),\ (a+3.\tfrac{b-a}{n+1}),\cdots,\ (a+n.\tfrac{b-a}{n+1}).$$

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে মধ্যে আছে $n$ সংখ্যক মধ্যক এবং তাহাদের আগে আছে $a$ ও শেষে আছে $b$, সেইজন্য মোট পদসংখ্যা $n+2$ হইল। প্রথম পদের সঙ্গে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া ২য় পদ অর্থাৎ প্রথম মধ্যক পাওয়া গেল, এইভাবে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া পর পর অন্য মধ্যকগুলি পাওয়া যাইবে। শেষ মধ্যক হইল $a+n\frac{b-a}{n+1}$, ইহা $b-d$ বা $b-\frac{b-a}{n+1}$ এরূপ প্রয়োজন মত লেখা যায়। ]

উদা. 3. Insert 10 arithmetic means between 2 and 57.
[C. U. '19 ; D. B. '28 ]

2 এবং 57এর মধ্যে 10টি মধ্যক লইলে মোট 12টি পদযুক্ত একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে। ইহার প্রথম পদ 2 এবং দ্বাদশপদ 57. মনে কর, সাধারণ অন্তর $b$. $\therefore$ $t_{12}=57$, বা $2+11b=57$, বা $11b=55$, $\therefore$ $b=5$.

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=2+5=7$, দ্বিতীয় মধ্যক $=7+5=12$. এইরূপে নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$.

উদা. 4. There are $n$ arithmetic means between 4 and 31 such that the second mean : the last mean $=5:14$. Find $n$.

4 ও 31এর মধ্যে $n$ মধ্যক লইয়া মোট $(n+2)$ সংখ্যক পদ-যুক্ত সমান্তর শ্রেণী হইল। উহার প্রথম পদ 4 এবং $(n+2)$-তম পদ 31.

মনে কর, সাধারণ অন্তর $b$.

$\therefore \quad t_{n+2}=4+(n+2-1)b=31,$

বা, $(n+1)b=27 \cdots\cdots(1)$

আবার, $\because$ $b$ সাধারণ অন্তর,

$\therefore$ দ্বিতীয় মধ্যক $=4+2b$ এবং শেষ মধ্যক $=31-b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $\dfrac{4+2b}{31-b}=\dfrac{5}{14},$

বা, $28b+56=155-5b$, বা, $33b=99$, $\therefore \; b=3.$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $(n+1)\times 3=27,$

বা, $n+1=9$, $\therefore \; n=8.$

## Exercise 3

Find the arithmetic mean between :—

1. 7 and 23.
2. $-5$ and 13.
3. $-4$ and $-14$.
4. $(x-a)^2$ and $(x+a)^2$
5. $2\frac{1}{4}$ and $3\frac{1}{2}$.
6. $\frac{m+n}{m-n}$ and $\frac{m-n}{m+n}$.
7. Insert 7 arithmetic means between 1 and 41. [ C. U. '14 ]
8. Insert 4 arithmetic means between 4 and 324. [ C. U. 1890 ]
9. There are $n$ arithmetic means between 2 and 23 and the first mean : the last mean $=1:4$ ; find $n$.
10. There are $n$ arithmetic means between 14 and 38 such that the 2nd mean : the last mean $=4:7$ ; find $n$.

## 12. সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

Show how to find the sum of $n$ terms of an A. P., being given the first term and the common difference.

[ C. U. '30, '33, '37, '41, '43, '44. '45 ; D. B. '34, '38, '43 ; G. U. '49 ]

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $b$ এবং উহার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, উহার যোগফল $S$ এবং শেষ পদ $l$.

অতএব, $S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(l-2b)+(l-b)+l$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে,

$$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots+(a+2b)+(a+b)+a$$

যোগ করিয়া, $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$

$+(a+l)=(a+l)+(a+l)+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=n(a+l)$.

$\therefore\ \boldsymbol{S=\frac{n}{2}(a+l)}\cdots(1)$

এক্ষণে, $\because\ l$ শেষ পদ বা $n$-তম পদ, $\therefore\ l=a+(n-1)b$.

$\therefore$ (1) হইতে $l$-এর মান বসাইয়া পাই $\boldsymbol{S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}\cdots(2)$.

[ **দ্রষ্টব্য** : কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদ জানা থাকিলে সূত্র (1) এবং অন্যস্থলে সূত্র (2)-এর সাহায্যে যোগফল নির্ণয় করিবে। ]

### উদাহরণমালা 4

**উদা. 1.** Sum to 21 terms the Arithmetic progression $3+7+11+\cdots$

এস্থলে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=7-3=4$ এবং পদসংখ্যা $n=21$. মনে কর, যোগফল $S$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=\frac{21}{2}\{3\times2+(21-1)\times4\}=\frac{21}{2}\times86=903.$

উদা. 2. The first two terms of an A. P. are 3 and 1. Write down the 10th term and the sum of the first 10 terms. [ C. U. '13 ]

এখানে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=1-3=-2$.

পদসংখ্যা $n=10$. মনে কর, যোগফল $=S$.

$\therefore\ t_{10}=a+(n-1)b=3+(10-1)\times(-2)=3-18=-15$ (উত্তর)

এবং $S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{10}{2}(3-15)=5\times(-12)=-60$ ( উত্তর )।

উদা. 3. Find the sum of $3+5+7+\cdots$ to $n$ terms.

এখানে $a=3$, $b=5-3=2$. মনে কর, সমষ্টি $=S$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=\frac{n}{2}\{2n+4\}=n^2+2n.$

উদা. 4. Find the sum of the series $5+7+9+\cdots+65$.

এস্থলে $a=5$, $b=7-5=2$. মনে কর, পদসংখ্যা $=n$,

সুতরাং $n$-তম পদ বা শেষপদ $=65$.

$\therefore\ a+(n-1)b=65$, বা, $5+(n-1)\times2=65$,

বা, $2(n-1)=60$, বা, $n-1=30$, $\therefore\ n=31$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{31}{2}(5+65)=\frac{31}{2}\times70=1085$.

উদা. 5. Find the A. P. of which the sum to $n$ terms is $(2n+1)(2n-1)$.

মনে কর, $n$ সংখ্যক পদের যোগফল $S_n$.

$\therefore\ S_n=(2n+1)(2n-1)=4n^2-1.$

এখন যদি $n$-এর স্থানে 1, 2, 3 প্রভৃতি বসাই তাহা হইলে $S_1$ অর্থাৎ, প্রথম একটি পদের যোগফল, $S_2$ অর্থাৎ প্রথম দুইটি পদের যোগফল ইত্যাদি পাইব।

$\therefore\ S_1=4.1^2-1=3$, $S_2=4.2^2-1=15$, $S_3=4.3^2-1=35$.

আবার $t_1 = S_1 = 3$ [$\because$ প্রথম একটি পদের যোগফল ও প্রথম পদ একই] এবং $t_2 = S_2 - S_1 = 15 - 3 = 12$ [ কারণ প্রথম দুই পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদের সমান হয়। ]

অনুরূপে $t_3 = S_3 - S_2 = 35 - 15 = 20$

এবং $t_4 = S_4 - S_3 = 63 - 35 = 28.$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $= 3, 12, 20, 28, \cdots$ ইহার প্রথম পদটি বাদে বাকী পদগুলি A. P. হইবে।

[ **দ্রষ্টব্য** ঃ এইরূপ ক্ষেত্রে অন্ততঃ 4টি পদ নির্ণয় করিয়া তবে উত্তর স্থির করিবে। ]

**উদা. 6.** Find the sum of all the multiples of 13 between 750 and 1000. [ C. U. '35 ]

13-এর গুণিতকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং উহার সাধারণ অন্তর $= 13$. এখন, 750 এর ঠিক পরবর্তী যে সংখ্যা 13-এর গুণিতক বা 13 দ্বারা বিভাজ্য তাহাই ঐ শ্রেণীর প্রথম পদ হইবে এবং 1000এর ঠিক পূর্ববর্তী যে সংখ্যা 13এর গুণিতক তাহাই ঐ শ্রেণীর শেষ পদ হইবে।

```
13 ) 750 ( 57              13 ) 1000 ( 76
     65                          91
     ---                         ---
     100                          90
      91                          78
     ---                          --
       9    13-9=4,               12
```

$\therefore\ 750 + 4 = 754$ প্রথম পদ। $\therefore\ 1000 - 12 = 988$ শেষ পদ।

মনে কর, পদসংখ্যা $= n$. $\therefore$ $n$-তম পদ $a + (n-1)b = 988$,

বা, $754 + (n-1) \times 13 = 988$, বা, $13(n-1) = 988 - 754 = 234$

বা, $n - 1 = 18$, $\therefore\ n = 19.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= \frac{19}{2}(754 + 988) = \frac{19}{2} \times 1742 = 16549.$

* উদা. 7. Find, *without assuming any formula*, the sum of $1+3+5+\cdots\cdots$ to 40 terms. [C. U. '21]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$, এবং $t_1=a=1$, $t_2=a+1.b=1+1.2=3$, $t_3=a+2b=1+2.2=5$,

$\therefore$ স্পষ্টত: $t_{40}=a+39b=1+39.2=79$ ; মনে কর, যোগফলটি $=s$.

একণে, $s=1+3+5+\cdots+75+77+79$

এবং $s=79+77+75+\cdots+5+3+1$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore$ $2s=80+80+80+\cdots 40$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=80\times 40$,

$\therefore$ $s=\frac{80\times 40}{2}=1600$.

উদা. 8. Find without assuming any formula, the sum of the first $n$ terms of the series $1+3+5+7+\cdots$

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$ এবং $t_1=1$,

$t_2=1+1.2=3$, $t_3=1+2.2=5$, $t_4=1+3.2=7$,

অনুরূপে $t_n=1+(n-1).2=2n-1$.

একণে, $s=1+3+5+\cdots+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)$

আবার, $s=(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+2+1$

যোগ করিয়া, $2s=2n+2n+2n+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=2n\times n=2n^2$, $\therefore$ $s=n^2$.

উদা. 9. Find the sum of the series $39+35+\cdots+3$, without assuming the formula of summation of a series in A. P.

এস্থলে ১ম পদ $a=39$, সা. অন্তর $b=37-39=-2$. মনে কর,পদসংখ্যা $=n$.

$\therefore$ $a+(n-1)b=3$, বা, $39+(n-1)\times(-2)=3$,

বা, $-2(n-1)=-36$, বা, $n-1=18$, $\therefore$ $n=19$.

$\therefore$ $s=39+37+35+\cdots\cdots+7+5+3$

আবার, $s=3+5+7+\cdots\cdots+35+37+39$

$\therefore$ $2s=42+42+42+\cdots 19$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত [$\because n=19$]

$=42\times 19$, $\therefore$ $s=\frac{42\times 19}{2}=399$.

[ দ্রষ্টব্য ঃ এস্থলে কেবল যোগের সূত্রটি প্রয়োগ করা নিষিদ্ধ, সেইজন্য পদসংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উহার সূত্র ব্যবহার করা হইয়াছে ; কিন্তু উদা. 7 ও উদা. 8এ যে কোন সূত্র প্রয়োগ করা নিষিদ্ধ বলিয়া পদসংখ্যা নির্ণয়ের সূত্রও ব্যবহার করা হয় নাই। ইহা লক্ষ্য কর। ]

**উদা. 10.** Find the sum of $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots$to 20 terms. [C. U. 1881]

এস্থলে দুইটি সমান্তর শ্রেণী মিশাইয়া আছে। যথা, $(3+8+13+\cdots)$ এবং $(4+9+14+\cdots)$, সুতরাং প্রত্যেক শ্রেণীতে পদসংখ্যা $=10$.

$\therefore\ s=(3+8+13+\cdots\text{to 10 terms})+(4+9+14+\cdots\text{to 10 terms})$

$=\frac{10}{2}\{6+9\times5\}+\frac{10}{2}\{8+9\times5\}=5\times51+5\times53=520.$

**উদা. 11.** How many terms of the series $3+5+7+\cdots$must be taken in order that the sum may be equal to 624 ? [C. U. '39 Sup.]

মনে কর, $n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি 624. এখানে $a=3$, $b=5-3=2$.

$\because\ \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s,\ \therefore\ \frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=624,$

বা, $\frac{n}{2}(2n+4)=624$, বা, $n^2+2n=624$,

বা, $n^2+2n-624=0$, বা, $(n+26)(n-24)=0$, $\therefore\ n=-26$ বা 24,

$\because$ পদসংখ্যা ঋণ-রাশি হইতে পারে না, $\therefore$ $-26$ গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=24$ ( উত্তর )।

[ দ্রষ্টব্য ঃ $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ এই সূত্রের $a$, $b$, $n$ ও S এই চারিটি রাশির যে কোন তিনটি জানা থাকিলে ঐ সূত্র-সাহায্যে চতুর্থ রাশিটি নির্ণয় করা যায়। ]

**উদা. 12.** Find the number of terms of the series $17, 5, -7, \cdots$ whose sum is $-78$. [ D. B. '31 ]

মনে কর, শ্রেণীটির $n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $-78$ ; এস্থলে প্রথম পদ $a=17$, সাধারণ অন্তর $b=5-17=-12$.

$\because \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s. \therefore \frac{n}{2}\{34+(n-1)\times(-12)\}=-78,$

বা, $\frac{n}{2}(46-12n)=-78$, বা, $23n-6n^2+78=0$,

বা, $6n^2-23n-78=0$, বা, $(6n+13)(n-6)=0$, $\therefore n=-\frac{13}{6}$ বা 6.

$\because$ পদসংখ্যা ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হয় না, $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=6$.

**উদা. 13.** The first term of an A. P. is 9 and the last term is 96. If the sum be 1575, find the common difference.

[D. B. '32]

$\because S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\therefore \frac{n}{2}(9+96)=1575$, বা, $\frac{n}{2}=\frac{1575}{105}=15$, $\therefore n=30$.

আবার, এখানে শেষ বা $n$-তম পদ $=96$, $\therefore a+(n-1)b=96$,

বা, $9+29b=96$, বা, $29b=87$, $\therefore b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

**উদা. 14.** The sum of $n$ terms of the series $10+8+6+\cdots$ is 28 ; find $n$ and explain the double answer.

এখানে প্রথম পদ $a=10$, সাধারণ অন্তর $b=8-10=-2$.

$\because \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, $\therefore \frac{n}{2}\{20+(n-1)\times-2\}=28$,

বা, $11n-n^2-28=0$, বা, $n^2-11n+28=0$, বা, $(n-4)(n-7)=0$.

$\therefore n=4$ বা 7. এস্থলে দুইটি উত্তরই সম্ভব হইবে ; কারণ, শ্রেণীটির ৫ম হইতে ৭ম এই 3টি পদের সমষ্টি শূন্য। শ্রেণীর 7টি পদ $=10, 8, 6, 4, 2, 0, -2$, সুতরাং ইহার 4টি পদের সমষ্টি ও 7টি পদের সমষ্টি সমান।

**উদা. 15.** Show that the sum of $n$ terms of the series $4, 12, 20, 28, \cdots$ is the square of an even number. [C.U. '27, '39]

এস্থলে প্রথম পদ $a=4$, সাধারণ অন্তর $b=12-4=8$

$\therefore S_n=\frac{n}{2}\{2.4+(n-1)\times 8\}=\frac{n}{2}(8+8n-8)=4n^2=(2n)^2$.

$\because$ $n$-এর মান যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা যাহাই হউক না কেন $2n$এর মান সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা হইবে, $\therefore (2n)^2$ একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর $n$ পদের যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ হইল।

উদা. 16. The sum of $n$ terms of an A. P. is 40, the common difference is 2, and the last term is 13. Find $n$.

[C. U. '46 ; Pat. U. '18]

এখানে $n$-তম পদই শেষ পদ।

$\therefore\ a+(n-1)b=13$, বা, $a+(n-1)\times 2=13$.

$\therefore\ a=13-2n+2=15-2n$.

আবার, $\because\ \frac{n}{2}(a+l)=S$,

$\therefore\ \frac{n}{2}(15-2n+13)=40$ [ $a$, $l$, S এর মান বসাইয়া ],

বা, $-n^2+14n-40=0$, বা $n^2-14n+40=0$,

বা, $(n-4)(n-10)=0$, $\therefore\ n=4$, বা 10.

[ দ্রষ্টব্য : $\because$ শেষপদ 13 এবং সাধারণ অন্তর 2, $\therefore$ পদসংখ্যা $n=4$ হইলে প্রথম পদ হইবে 7 ; আর $n=10$ হইলে, প্রথম পদ হইবে $-5$ এবং তখন প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। $\therefore$ দুইটি উত্তরই সম্ভব। ]

উদা. 17. Find the sum of 21 consecutive odd numbers of which the last term is 51.

এখানে শ্রেণীর শেষপদ 51 এবং সাধারণ অন্তর 2, সুতরাং শ্রেণীটি উল্টাইয়া লিখিলে $51+49+47+\cdots$এই শ্রেণী হইবে। ইহার সাধারণ অন্তর $-2$ এবং $n=21$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{21}{2}\{2\times 51+(21-1)\times -2\}$

$=\frac{21}{2}(102-40)=\frac{21}{2}\times 62=651$.

উদা. 18. If the 18th term of an A. P. is 39, find the sum of 35 terms of the series.

মনে কর, প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $b$.

$\therefore\ t_{18}=a+(18-1)b=a+17b$. $\therefore\ a+17b=39$ ( স্বীকার) ;

এক্ষণে, $S_{35}=\frac{35}{2}\{2a+(35-1)b\}=\frac{35}{2}\{2a+34b\}$

$=35(a+17b)=35\times 39=1365$.

উদা. 19. The sum of 10 terms of an A. P. is 120 and the sum of 15 terms is 255 ; find the sum of $n$ terms.

মনে কর, প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $b$.

$\because \; S_{10}=120, \quad \therefore \; \frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=120,$

বা, $5(2a+9b)=120, \quad \therefore \; 2a+9b=24\cdots\cdots(1)$

আবার, $\because S_{15}=255, \; \therefore \frac{15}{2}(2a+14b)=255,$ বা $2a+14b=34\cdots(2)$

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=3, b=2.$

$\therefore \; S_n=\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2).$

* উদা. 20. A class consists of a number of boys whose ages are in A.P., the common difference being four months. If the youngest boy is just 8 years old, and if the sum of the ages is 168 years, find the number of boys in the class.

[ C. F. A. 1872 ]

মনে কর, বালকের সংখ্যা $n$. এখানে প্রথম পদ 8 বৎসর এবং সাধারণ অন্তর $=4$ মাস $=\frac{1}{3}$ বৎসর।

$\therefore \; \frac{n}{2}\{2\times 8+(n-1)\times \frac{1}{3}\}=168,$ বা $\frac{n}{2}(16+\frac{n-1}{3})=168,$

বা, $\frac{n}{2}\times\frac{n+47}{3}=168,$ বা, $n^2+47n=1008,$

বা, $n^2+47n-1008=0,$ বা, $(n-16)(n+63)=0,$

$\therefore \; n=16,$ বা, $-63.$

$\therefore$ বালকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ নির্ণেয় বালক-সংখ্যা $=16.$

উদা. 21. In boring a well 200 ft. deep the cost is Re. 1. 2as. for the first foot and an additional anna for each subsequent foot. What is the cost of boring the well ?

[ C. U. 1934 ]

প্রদত্ত সর্ত হইতে $a=18$ আনা, $b=1$ আনা এবং $n=200.$

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ ( অর্থাৎ S ) $=\frac{200}{2}\{2.18+(200-1)\times 1\}$ আনা

$=100\times 235$ আ. $=23500$ আনা $=1468$ টা. 12 আ.।

উদা. 22. Two travellers start together on the same road. One of them travels uniformly 10 miles a day. The other travels 8 miles the first day and increases his pace by half a mile a day each succeeding day. After how many days will the latter overtake the former ? [ Pat. U. '20 ]

মনে কর, নির্ণেয় দিনসংখ্যা $=n$, এই $n$ দিনে দুই ব্যক্তিই সমান পথ যাইবে। প্রথম ব্যক্তি প্রত্যহ 10 মাইল করিয়া যায়,

$\therefore$ সে $n$ দিনে যায় $10n$ মাইল······(1).

আর দ্বিতীয় ব্যক্তি ১ম দিন 8 মাইল, ২য় দিন $8\frac{1}{2}$ মা., ৩য় দিন 9 মা. এই হিসাবে যায়। এক্ষেত্রে প্রথম পদ $a=8$, সাধারণ অন্তর $b=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ সে $n$ দিনে যায় $\frac{n}{2}\{2.8+(n-1)\times\frac{1}{2}\}$ মা., বা, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})$ মা.···(2)

এখন (1) ও (2) হইতে পাই, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})=10n$,

বা, $\frac{31+n}{2}=20$ [ $\frac{n}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া ], বা, $31+n=40$,

$\therefore$ $n=9$, $\therefore$ নির্ণেয় সময় $=9$ দিন।

## 13 স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় যোগফল

1, 2, 3, 4,···প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা ( natural numbers ) বলে। First $n$ natural numbers বলিলে 1, 2, 3,···, $n$ এইগুলি বুঝাইবে।

I. Find the sum of the first $n$ natural numbers.

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=1$ এবং পদ-সংখ্যা $=n$.

$\therefore$ $S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{n}$. [ ইহা মুখস্থ রাখিও ]

II. Find the sum of the squares of the first $n$ natural numbers. [ C. U. '15 ; D. B '32, '34, '45 ; G. U. '51 ]

মনে কর, যোগফল $s$, সুতরাং $s=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

এক্ষণে, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ [ Identically, অর্থাৎ $n$এর মান যাহাই হউক না কেন, উভয়পক্ষ সর্বদা সমান। ]

এখন ঐ অভেদে $n$ এর স্থলে পরপর 1, 2, 3,……, $n$ লিখিয়া পাই

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
…………………………………
$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

( যোগ করিয়া ) $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$
$$-3(1+2+3+\cdots+n)+n.$$

বা, $n^3=3s-\dfrac{3n(n+1)}{2}+n,$

বা, $3s=n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n=\dfrac{2n^3+3n(n+1)-2n}{2}$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$\therefore\quad s=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ [ ইহা মুখস্থ রাখিবে। ]

[ **দ্রষ্টব্য :** যোগ করিবার সময় বামপক্ষের সব পদ কাটিয়া গিয়া কেবল $n^3$ অবশিষ্ট আছে। ডান পক্ষে 3কে common লইয়া রাখা হইয়াছে। $1+1+1+\cdots$to $n$ terms যোগ করিয়া যোগফল $n$ হয়; কারণ 5টি 1 যোগ করিয়া 5 হয়, সুতরাং $n$ সংখ্যক এক যোগ করিয়া $n$ হইল। ]

III. Find the sum of the cubes of the first $n$ natural numbers. [ C. U. '18 ]

মনে কর, যোগফল $s$, সুতরাং $s=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

$n$-এর মান যাহাই হউক না কেন,

$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ [ সর্বদা সমান ]

এক্ষণে, $n$-এর স্থানে পর পর 1, 2, 3,⋯, $n$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1$$

( যোগ করিয়া ) $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$
$$-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n,$$

বা, $n^4=4s-\dfrac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n(n+1)}{2}-n.$

$$\therefore\quad 4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$
$$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$$
$$=n(n+1)(n^2+n)=n(n+1)n(n+1)=n^2(n+1)^2$$
$$\therefore\quad s=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

[ দ্রষ্টব্য : I ও III লক্ষ্য করিয়া দেখ, III এর যোগফল I এর যোগফলের বর্গ। সুতরাং ইহা মনে রাখা সহজ। $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$. ]

এই সূত্রগুলির প্রয়োগে বিবিধ সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

## উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Sum to $n$ terms the series whose $n$th term is $n(n-1)$.

মনে কর, সমষ্টি $s$. এখানে $t_n=n(n-1)=n^2-n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=1^2-1$$
$$t_2=2^2-2$$
$$t_3=3^2-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2-n$$

( যোগ করিয়া ) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{2n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** যোগে বাম পক্ষের $t_1+t_2+\cdots+t_n=s$ লেখা হইল। ]

**উদা.** 2. Sum to $n$ terms $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$

[ C. U. '12, '17, '39 Sup., '44, '51 ; D. B. '26, '33, '41, '44 ]

এস্থলে $n$-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত। প্রদত্ত শ্রেণীর পদগুলির প্রথম উৎপাদকগুলি 1, 2, 3,$\cdots$এইভাবে হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি 2, 3, 4,$\cdots$এইভাবে হইয়াছে।

$\therefore$ ইহার $t_n=(1, 2, 3\cdots$এর $n$-তম পদ$)\times(2, 3, 4,\cdots$এর $n$-তম পদ$)$

$=n.(n+1)=n^2+n.$ এক্ষণে $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2+n$$

( যোগফল ) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** এরূপ স্থলে প্রথমে $n$-তম পদ নির্ণয় করিয়া $n$-এর স্থানে 1, 2, 3⋯প্রভৃতি লিখিয়া যোগফল নির্ণয় করিতে হয়। অঙ্ক দেখিয়া $n$-তম পদ নির্ণয়ের উপায় স্থির করিতে হয়। প্রত্যেক পদে দুই বা তিনটি উৎপাদক থাকিলে উপরে প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বন করিবে। ]

উদা. 3. Sum the series $1^2+3^2+5^2+\cdots$ to $n$ terms [ C. U. '50 ]

এস্থলে $t_n=1+3+5+\cdots$এর $n$-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=4n^2-4.n+1$$

(যোগ করিয়া) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

উদা. 4. Sum to $n$ terms $2^2+5^2+8^2+\cdots\cdots$ [ D. B. '35 ]

এস্থলে $t_n=2+5+8+\cdots$এই শ্রেণীর $n$-তম পদের বর্গ

$$=\{2+(n-1)\times 3\}^2=(3n-1)^2=9n^2-6n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=9.1^2-6.1+1$$
$$t^2=9.2^2-6.2+1$$
$$t_3=9.3^2-6.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=9.n^2-6n+1$$

( যোগ ) $\therefore \quad s=9(1^2+2^2+\cdots+n^2)-6(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{6n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{3n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+2n}{2}=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

**উদা. 5.** Sum to $n$ terms $1+4+8+13+19+26+\cdots$

মনে কর, যোগফল $s$ এবং $n$-তম পদ $t_n$.

অতএব, $s=1+4+8+13+19+\cdots+t_n$

আবার, $s=\quad 1+4+\ 8+13+\cdots+t_{n-1}+t_n$

[ এক পদ সরাইয়া লিখিয়া ]

( বিয়োগ করিয়া ) $0=1+3+4+5+6+\cdots\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore \quad t_n=1+3+4+5+6+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত [ পক্ষান্তর করিয়া ]

$=1+\{3+4+5+6+\cdots(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$$=1+\frac{n-1}{2}\{6+(n-2)\times 1\}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n-1.$$

এখন $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{3}{2}.1-1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2-\tfrac{3}{2}.2-1$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{3}{2}.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{3}{2}n-1$$

( যোগ করিয়া ) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}(1+2+\cdots+n)-n$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{3n(n+1)}{4}-n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)-12n}{12}$$

$$=\frac{2n(n^2+6n-1)}{12}=\frac{n(n^2+6n-1)}{6}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** এস্থলে দেখ, অন্য প্রণালীতে $t_n$ স্থির করিতে হইল। এখানে দেখা গেল যে পর পর পদগুলির অন্তরফলগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। তাই এক পদ করিয়া সরাইয়া লিখিয়া বিয়োগ করিয়া $t_n$ নির্ণয় করা হইল। এখানে আরও দেখ $t_n$ যে শ্রেণীর সমান তাহার প্রথম পদটি অর্থাৎ 1টি বাদে বাকী পদগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া বাকী পদগুলির সংখ্যা $n$ অপেক্ষা 1 কম অর্থাৎ $n-1$ ধরা হইল ; কারণ, একটি পদ ( অর্থাৎ 1 ) বাদ গিয়াছে। ]

**উদা. 6.** Sum to $n$ terms the series $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3,\cdots$এর $n$-তম পদ$)\times(2, 3, 4,\cdots n$-তম পদ$)$
$\times(3, 4, 5,$ এর $n$-তম পদ$)=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots,n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=1^3+3.1^2+2.1$$
$$t_2=2^3+3.2^2+2.2$$
$$t_3=3^3+3.3^2+2.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+3.n^2+2.n$$

( যোগ ) $\therefore\quad s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2(1+2+\cdots+n)$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right\}=n(n+1)\left\{\frac{n^2+5n+6}{4}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**উদা. 7.** Sum to $n$ terms the series $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots$

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3,\cdots$এর $n$-তম পদ$)\times(3, 4, 5,\cdots$এর $n$-তম পদের বর্গ)

$$=n\times(n+2)^2=n^3+4n^2+4n.$$

এস্থলে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^3+4.1^2+4.1$$
$$t_2=2^3+4.2^2+4.2$$
$$t_3=3^3+4.3^2+4.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+4.n^2+4.n$$

$$\therefore\quad s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+4(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32).$$

**উদা. 8.** Sum to $n$ terms $(1)+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$

এখানে $t_n=(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{1}{2}.2$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{1}{2}.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{1}{2}.n$$

( যোগ ) $\therefore \quad s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{12}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

**উদা. 9.** Sum to $n$ terms $(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots$

এস্থলে বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে 1, 2, 3 প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। এখন দেখিতে হইবে যে $n$-সংখ্যক বন্ধনী তুলিয়া দিলে মোট কতগুলি পদ হইবে। এখানে দেখা যায় যে, প্রথম বন্ধনীর ভিতর পদসংখ্যা 1, দ্বিতীয় বন্ধনীতে পদসংখ্যা 2, তৃতীয় বন্ধনীতে 3, স্বতরাং বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে মোট পদসংখ্যা হইবে $(1+2+3+\cdots\cdots+n)$ অর্থাৎ $\frac{n(n+1)}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+2+3+\cdots\cdots\frac{n(n+1)}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\left[\because \quad S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n,\right.$$

$\therefore$ এখানে $n$-এর স্থানে $\frac{n(n+1)}{2}$ বসান হইল। ]

$$=\tfrac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+1\right\}=\frac{n(n+1)}{4}\times\frac{n^2+n+2}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

উদা. 10. Sum $1-2+3-4+5-6+\cdots$ to $n$ terms.

(i) যদি $n$ কোন যুগ্ম বা জোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=-1\times\frac{n}{2}=-\frac{n}{2}$.

(ii) যদি $n$ কোন বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=1+\{(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots\cdots\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$*

$=1+\{1+1+1+\cdots\cdots\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+1\times\frac{n-1}{2}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

উদা. 11. Sum to $n$ terms $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$

এস্থলে $t_n=\frac{1}{(1,2,3,\cdots\text{এর } n\text{-তম পদ})\times(2,3,4,\cdots\text{এর } n\text{-তম পদ})}=\frac{1}{n(n+1)}$

এক্ষণে, $t_1=\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$t_3=\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

..................

$t_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(যোগ করিয়া) $s=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

[ * এখানে পদসংখ্যা বিজোড় বলিয়া প্রথম পদকে ছাড়িয়া বাকী পদসংখ্যা $n-1$ জোড় হইবে। এখন দুইটি করিয়া পদ এক একটি বন্ধনীভুক্ত করায় মোট $\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক বন্ধনী বা পদ হইল। ]

* উদা. 12. Sum to $n$ terms $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

[ W. B. S. F. '53 ]

এস্থলে $t_n=\frac{1}{(1, 3, 5,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})(3, 5, 7,\cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})}$

$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

এক্ষণে, $t_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})$

$t_2=\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$

$t_3=\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})$

.....................

$t_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

( যোগ করিয়া ) $s=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$.

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. $\therefore \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}=\frac{1}{1.3}$ এইভাবে ধরা যায়। প্রদত্ত রাশির অসীম পদের যোগফল $=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$; $t_1$, $t_2$, $t_3$ প্রভৃতি অসীম পদ পর্যন্ত লিখিয়া যোগ করিলে যোগফল মাত্র $\frac{1}{2}\times(1)$ হইবে, অন্য সব ভগ্নাংশগুলি কাটিয়া যাইবে। ]

## বিবিধ উদাহরণমালা

উদা. 1. The sum of 3 numbers in A. P. is 27 and their product is 693 ; find the numbers.

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-b, a, a+b$

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $a-b+a+a+b=27\cdots(1)$

এবং $(a-b).a.(a+b)=693\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে $3a=27$, $\therefore\ a=9$.

(2) হইতে $a(a^2-b^2)=693$, বা $9(81-b^2)=693$,

বা, $81-b^2=77$, বা, $b^2=4$, $\therefore\ b=\pm 2$.

অতএব, $b=2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $(9-2)$, 9 ও $(9+2)$ অর্থাৎ 7, 9, 11 ;

এবং $b=-2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $9-(-2)$, 9, $9-2$ অর্থাৎ 11, 9, 7.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় = 7, 9, 11 অথবা 11, 9, 7.

উদা. 2. Four numbers are in A. P. The sum of the extremes is 10, and the product of the means is 24. Find the numbers. [C. U. '43 ]

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-3b$, $a-b$, $a+b$, $a+3b$ [ সাধারণ অন্তর $2b$ ]

অতএব, প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই

$a-3b+a+3b=10\cdots(1)$ এবং $(a-b)(a+b)=24\cdots(2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে $2a=10$, $\therefore\ a=5$ ; (2) হইতে $a^2-b^2=24$,

বা, $25-b^2=24$, বা $b^2=1$, $\therefore\ b=\pm 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $=(5-3)$, $(5-1)$, $(5+1)$ ও $(5+3)$

অথবা $(5+3)$, $(5+1)$, $(5-1)$ ও $(5-3)$

$=2, 4, 6, 8$ অথবা $8, 6, 4, 2$.

[ **দ্রষ্টব্য** : (1) পদসংখ্যা যদি অযুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদটি $a$ এবং সাধারণ অন্তর $b$ ধরিতে হয়। (2) পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে মধ্যে পরপর $a-b$, $a+b$ দুইটি মধ্যপদ এবং সাধারণ অন্তর $2b$ ধরিয়া দুই পাশের পদগুলি লিখিবে। ]

উদা. 3. Divide 69 into three parts which are in A. P. and such that the product of the first two is 483.

মনে কর, অংশত্রয় যথাক্রমে $a-b$, $a$, $a+b$.

$\therefore\ a-b+a+a+b=69\cdots(1)$ এবং $(a-b)a=483\cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $3a=69$, $\therefore\ a=23$.

(2) হইতে পাই $(23-b)\times 23=483$, বা $23-b=21$, $\therefore\ b=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় অংশত্রয় = 21, 23, 25.

উদা. 4. If $a$, $b$, $c$, are in A. P., show that $ab+bc=2b^2$.

$\because$ $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণীর পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $b-a=c-b$, $\therefore$ $2b=a+c$.

এক্ষণে, উভয়পক্ষকে $b$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই $2b^2=ab+bc$.

উদা. 5. If $a, b, c$ are in A.P., prove that $\frac{1}{bc}$, $\frac{1}{ca}$, $\frac{1}{ab}$ are also in A. P.

$\because$ $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণীর পর পর 3টি পদ,

$\therefore \frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে,

অর্থাৎ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

[ **দ্রষ্টব্য**ঃ কোন সমান্তর শ্রেণীর পদগুলির সহিত একই সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে ফলগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে। এই নিয়মের সাহায্যে উদা. 5 সমাধান করা হইল। অন্য প্রণালী নিম্নে দেখ।

উদা. 6. If $a^2$, $b^2$, $c^2$ be in A. P., prove that $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ are also in A. P. [C. U. '10, '38 ; D. B. '45 ; G. U. '50 ]

[ অন্য প্রণালী ] $\because$ $a^2, b^2, c^2$ সমান্তর শ্রেণী ( স্বীকার ),

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$.

এক্ষণে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে

যদি $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $b^2-a^2=c^2-b^2$ হয়; কিন্তু প্রদত্ত শর্ত হইতে ইহারা সমান দেখানো হইয়াছে। $\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 7. The sun of $n$ terms of a series in A. P. is $5n^2+7n$. Find the first two terms of the series. [C. U. '41]

$n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল।

অতএব, $S_n=5n^2+7n$ ; এখন, $n=1$ ও 2 বসাইয়া পাই

$$S_1=5.1^2+7.1=12,$$
$$S_2=5.2^2+7.2=34$$

$\therefore\ t_1=S_1=12$ ( প্রথম একটি পদের যোগফল প্রথম পদই হয়। )

এবং $t_2=S_2-S_1=34-12=22$ ( প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বাদ দিলে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায় )।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পদ $=12,\ 22.$

উদা. 8. The sum of $p$ terms of an A. P. is $q$ and the sum of $q$ terms is $p$; find the sum of $p+q$ terms. [C. U. '50]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $=\frac{p}{2}\{2a+(p-1)b\}=q\cdots(1)$

এবং $\frac{q}{2}\{2a+(q-1)b\}=p\cdots(2).$

(1) হইতে পাই $2ap+p^2b-pb=2q\cdots(3)$

এবং (2) হইতে পাই $2aq+q^2b-qb=2p\cdots(4).$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$$2a(p-q)+b(p^2-q^2)-b(p-q)=2(q-p)=-2(p-q).$$

$\therefore\ 2a+(p+q)b-b=-2$ [উভয়পক্ষকে $p-q$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $2a+(p+q-1)b=-2\cdots(5)$

এক্ষণে, $p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)b\}$ [ সূত্র অনুসারে ]

$=\frac{p+q}{2}\times(-2)$ [(5) হইতে] $=-(p+q).$

**উদা. 9.** Show that the sum of the latter half of $2n$ terms of any series in A. P. is equal to one-third the sum of $3n$ terms of the same series. [ C. U. 1876 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore \quad S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}\cdots(1),$

$S_{2n}=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)b\}=n\{2a+(2n-1)b\}\cdots(2)$

এবং $S_{3n}=\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}\cdots(3).$

এক্ষণে, $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $=S_{2n}-S_n$

$=n\{2a+(2n-1)b\}-\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{4a+4bn-2b-2a-bn+b\}$

$=\frac{n}{2}\{2a+3bn-b\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$

আবার $\frac{1}{3}\times S_{3n}=\frac{1}{3}\times\frac{3n}{2}\{2a+\{3n-1)b\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $=3n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

**উদা. 10.** The $p$th term of an A. P. is $a$ and the $q$th term is $b$. Show that the sum of the first $p+q$ terms is $\frac{p+q}{2}\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\}$. [M. U. 1887]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore \quad f+(p-1)d=a\cdots(1)$

এবং $f+(q-1)d=b\cdots(2)$

$\therefore$ ( বিয়োগ ) $d(p-q)=a-b, \quad \therefore d=\frac{a-b}{p-q}.$

আবার, $(1)+(2)$ করিয়া $a+b=2f+(p+q-2)d.$

$\therefore \quad p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-1)d\}$

$$=\frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-2)d+d\}=\frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** অঙ্কে $a$ ও $b$ আছে বলিয়া প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর $a$ ও $b$ না ধরিয়া অন্য ধরিতে হইল। ]

**উদা. 11.** If $a$, $b$, and $c$ be respectively the $p$th, $q$th and $r$th terms of an A. P., prove that $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.
[ C. U. '32, '37, '46 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $f+(p-1)d=a\cdots(1)$, $f+(q-1)d=b\cdots(2)$,
এবং $f+(r-1)d=c\cdots(3)$.

$(1)-(2)$ করিয়া পাই $(p-q)d=a-b\cdots(4)$

এবং $(2)-(3)$ " " $(q-r)d=b-c\cdots(5)$

$\therefore$ $(4)\div(5)$ করিয়া পাই $\dfrac{p-q}{q-r}=\dfrac{a-b}{b-c}$,

$\therefore$ $a(q-r)-b(q-r)=b(p-q)-c(p-q)$,

বা, $a(q-r)+b(r-q)-b(p-q)+c(p-q)=0$,

বা, $a(q-r)+b(r-q-p+q)+c(p-q)=0$,

$\therefore$ $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

**উদা. 12.** If $a$, $b$, $c$ be respectively the sums of $p$, $q$ and $r$ terms of an A. P., prove that $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.
[ C. U. '45 ; D. B. '43, '45 ; G. U. '49, '51 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $=\frac{p}{2}\{2f+(p-1)d\}=a\cdots(1)$,

$\frac{q}{2}\{2f+(q-1)d\}=b\cdots(2)$, এবং $\frac{r}{2}\{2f+(r-1)d\}=c\cdots(3)$.

(1) হইতে উভয় পক্ষকে $\frac{p}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $2f+(p-1)d=\frac{2a}{p}\cdots(4)$

অনুরূপে (2) হইতে $2f+(q-1)d=\frac{2b}{q}\cdots(5)$

এবং (3) " $2f+(r-1)d=\frac{2c}{r}\cdots(6)$.

এক্ষণে, $(4)-(5)$ করিয়া $(p-q)d=\frac{2a}{p}-\frac{2b}{q}=2(\frac{a}{p}-\frac{b}{q})\cdots(7)$

এবং $(5)-(6)$ " $(q-r)d=2(\frac{b}{q}-\frac{c}{r})\cdots(8)$

$\therefore$ $(7)\div(8)$ করিয়া $\dfrac{p-q}{q-r}=\dfrac{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}}{\frac{b}{q}-\frac{c}{r}}$,

$\therefore$ $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r)=\frac{b}{q}(p-q)-\frac{c}{r}(p-q)$ [ বজ্রগুণন দ্বারা ]

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{a}(q-r)-\frac{b}{a}(p-q)+\frac{c}{r}(p-q)=0,$

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{a}(q-r+p-q)+\frac{c}{r}(p-q)=0,$

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{a}(p-r)+\frac{c}{r}(p-q)=0,$

বা, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{a}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$

**উদা. 13.** The sum of $n$ terms of two Arithmetic series are in the ratio of $n-1:n+1$; find the ratio of their 5th terms.

মনে কর, শ্রেণীদ্বয়ের প্রথম পদ যথাক্রমে $a$ ও $f$ এবং সাধারণ অন্তর $b$ ও $d$.

পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত অর্থাৎ $\frac{a+4b}{f+4d}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}{\frac{n}{2}\{2f+(n-1)d\}}=\frac{n-1}{n+1},$

বা, $\frac{2a+(n-1)b}{2f+(n-1)d}=\frac{n-1}{n+1},$ এক্ষণে $n=9$ লিখিলে পাই

$\frac{2a+8b}{2f+8d}=\frac{9-1}{9+1},$ বা, $\frac{2(a+4b)}{2(f+4d)}=\frac{8}{10},$ $\therefore\ \frac{a+4b}{f+4d}=\frac{4}{5}.$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=4:5.$

**উদা. 14.** If $s_1, s_2, s_3$ denote the sums of $n$ terms of three series in A. P., the first term of each being the same and the respective common differences 1, 2 and 3, show that $s_1+s_3=2s_2$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$

$\therefore\ s_1=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 1\}=\frac{n}{2}(2a+n-1)$

$s_2=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2a+2n-2),$

$s_3=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 3\}=\frac{n}{2}(2a+3n-3).$

$\therefore\ s_1+s_3=\frac{n}{2}(2a+n-1)+\frac{n}{2}(2a+3n-3)$

$=\frac{n}{2}(4a+4n-4)=2.\frac{n}{2}(2a+2n-2)=2s_2.$

উদা. 15. The angles of a rectilineal figure are in A. P. If the least of them be 88° and their common difference 10°, find the number of sides.

মনে কর, বাহুসংখ্যা $= n$. এস্থলে ১ম পদ $a = 88°$, সা. অন্তর $b = 10°$.

$\because$ কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ

= বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ,

$\therefore \ \frac{n}{2}\{2.88° + (n-1).10°\} + 360° = 2.n.90°$

বা, $88n + 5n^2 - 5n + 360 = 180n$,

বা, $5n^2 - 97n + 360 = 0$, বা, $5n^2 - 72n - 25n + 360 = 0$,

বা, $(n-5)(5n-72) = 0$, $\therefore \ n = 5$ বা $\frac{72}{5}$.

$\because$ বাহুসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $= 5$.

## Exercise 4

Find the sum of :—

1. $1+3+5+7+\cdots\cdots$ to 10 terms. [ C. U. '23 ]
2. $5+8+11+\cdots$ to $n$ terms.
3. $14+10+6+\ldots$ to 12 terms.
4. $-14-11-8\cdots$ to 20 temrs.
5. $1+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$ to 19 terms.
6. $1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots$ to $n$ terms.
7. $12+12{\cdot}6+13{\cdot}2+\cdots$ to 21 terms.
8. $1+5+9+\cdots$ to $(n-1)$ terms.
9. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots$ to $(n+2)$ terms.
10. $\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})+\cdots$ to 19 terms.
11. $2+5+8+\cdots+152$. [ C. U. '48 ]
12. $9+7+5+\cdots+(-25)$.

Find, without assuming any formula, the sum of

13. 1, 3, 5, 7,······to 30 terms. [C. U. '16]

14. $4+7+10+\cdots$to 112 terms. [D. B. '44]

15. $5+8+11+\cdots$to 51 terms. [E. B. S. B. '51]

16. $3+7+11+\cdots$to $n$ terms.

17. $1+4+7+10+\cdots+37$. [C. U. '19]

18. Find, without assuming any formula, the sum of the first $n$ natural numbers. [C. U. '10, '19 ; D. B. '28]

19. Find the sum of all the multiples of 7 between 320 and 442.

20. Find the sum of all the odd numbers between 100 and 200.

21. Find the sum of 30 consecutive odd numbers of which the last is 127.

22. Find the sum of 21 terms of an A. P. of which the 4th and the 15th terms are 13 and 57 respectively.

23. Find the sum of 16 terms of the series 10, 8, 6,... beginning at the 10th term.

24. The 21st term of an A. P. is 43, find the sum of its 41 terms.

25. How many terms must be taken of the series 2, 8, 14,...to make the sum 352 ? [C. U. '49]

26. The first two terms of an A. P. are $1\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{3}$. How many terms of the series must be taken to give the sum 171 ? [D. B. '40]

27. Find the sum of $1+4+6+9+11+14+\ldots$to 21 terms.

28. The sum of $n$ terms of an A. P. is $n^2$. Find the first term and the common difference. [G. U. '48]

**29.** Find the series in A. P. of which the sum of $r$ terms is $2r^2+3r$.

**30.** The sum of a certain number of terms of the A. P. $21+19+17+\cdots$ is 120. Find the last term and the number of terms. [ D. B. '47 ]

**31.** The sum of $n$ terms of a series is $\frac{n(4n^2-1)}{3}$. Find the $r$th term.

**32.** The sum of 9 terms of an A. P. is 171 and that of 24 terms is 996. Find the sum of 41 terms.

**33.** The sum of $n$ terms of an A. P. is $m$, and that of $m$ terms is $n$. Prove that the sum of $m+n$ terms is $-(m+n)$. [ C. U. '50 ]

**34.** Show that if unity be added to the sum of any number of terms of the series 8, 16, 24..., the result will be the square of an odd number.

* **35.** The sum of 3 numbers in A. P. is 36 and their product is 1140 ; find the numbers.

* **36.** Find four numbers in A. P. of which the sum is 22 and the product of the extreme terms is 10.

**37.** Find the sum of $n$ Arithmetic means between $a$ and $c$.

**38.** Prove that the sum of $n$ Arithmetic means between two quantities is $n$ times the single mean between them.

**39.** Sum to $n$ terms the series whose $n$th term is $2n-1$. [ D. B. '46 ]

Sum to $n$ terms :

**40.** $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\ldots$ [W. B. S. F. '52]

**41.** $3.7+5.10+7.13+9.16+\ldots$ [D. B. '36]

**42.** $5^2+8^2+11^2+\ldots$ **43.** $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots$

44. $2.3+3.4+4.5+\cdots$ [E. B. S. B. '49]

45. $1+3+6+10+15+\cdots$ 46. $1+4+9+16+25+\cdots\cdots$

47. $2.3.4+3.4.5+4.5.6+\cdots$ 48. $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

49. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots$ 50. $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots$

51. $1.7+3.9+5.11+\cdots$ [C. U. High '50]

51. (a). $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$to $r$ terms.

52. If $x, y, z$ are in A. P., shew that $y+z, z+x, x+y$ are in A. P.

53. If $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ are in A. P., prove that $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ are in A. P.

54. If $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ are in A. P., show that $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ are in A. P.

55. Four numbers are in A. P. The sum of their extremes is 11, while the product of the means is $29\frac{1}{4}$. Find the numbers. [D. B. '35]

56. If $a, b, c$ are in A.P., show that

$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$ [D.B. '31]

[ Hints : $\because$ $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a+c=2b$ ]

57. If $x, y, z$ be respectively the sums of the first $p, q$ and $r$ terms of a series in A. P., prove that $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$. [C. U.]

58. A person lends Rs. 1000 to a friend agreeing to charge no interest and also to recover the amount by monthly instalments decreasing successively by Rs. 2. In how many months will the loan be paid up, if the first instalment be Rs. 64 ? [C. U. '20]

59. The vertical angles of a polygon are in A.P. The smallest angle is 120° and the common difference is 5°. Find the number of sides of the polygon.

60. 100 stones are placed on a straight road at intervals of 5 yds. apart. A runner has to start from a basket 5 yds. from the first stone, pick up the stones and bring them back to the basket one by one. How many yards has he to run altogether ? [ Pat. U. '19 ]

61. A man has to travel 162 miles ; he goes 30 miles the first day, 27 the second, 24 the third, and so on. How many days does he take for the journey ? [ D. B. '24 ]

62. A tree in each year grows 1 inch less than it did in the previous year. If it grew 1 yd. in the first year, in how many years will it have ceased growing and what is its height then ?

63. A man undertakes to pay off a debt of Rs. 65 by monthly instalments ; he pays Rs. 2 in the first month and continually increases the instalments in every subsequent month by Re. 1. In what time will the debt be cleared up ? [C. U. '30 '50]

## গুণোত্তর শ্রেণী ( Geometrical Progression )

**14. গুণোত্তর শ্রেণী** ( G. P. ) ঃ কোন শ্রেণীর অন্তর্গত পদগুলি যদি এরূপ হয় যে, উহাদের যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্বপদের অনুপাত সর্বদাই সমান হয়, তাহা হইলে এরূপ শ্রেণীকে গুণোত্তর শ্রেণী বলে।

আর ঐ নিয়ত সমান অনুপাতটিকে ঐ শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** ( Common Ratio ) বলে। যথা—

(1) 1, 3, 9, 27,…ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত = 3.

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত $= -\frac{1}{2}$.

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** (1) এই সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ $r$ দ্বারা সূচিত করা হয়। (2) প্রথমদিক হইতে পদগুলিকে পর পর ঐ সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে পর পর পদগুলি পাওয়া যায়। (3) সুতরাং শেষ দিক হইতে পদগুলিকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা পর পর ভাগ করিতে থাকিলে পরপর পূর্ববর্তী পদগুলি পাওয়া যায়। (4) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক অনুপাতী হয়। ]

**15. সাধারণ অনুপাত নির্ণয়।** গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ব পদের দ্বারা ভাগ করিলে সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়।

**সাধারণ পদ** ( General term )। কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অনুপাত $r$ হইলে শ্রেণীটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$

এক্ষণে প্রথম পদ $= t_1 = a$ অর্থাৎ $a.r^0$ বা $a.r^{1-1}$

দ্বিতীয় পদ $= t_2 = ar$ অর্থাৎ $ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ $= t_3 = ar^2$ অর্থাৎ $ar^{3-1}$, ইত্যাদি

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক পদে $r$এর ঘাত উহার পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। $\therefore$ উহার $n$-তম পদ বা $\boldsymbol{t_n = ar^{n-1}}$.

## উদাহরণমালা 7

**উদা**. 1. Find the 6th term of the series 1, 2, 4, 8,$\cdots$.

এখানে ১ম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$, এবং পদসংখ্যা $n=6$.

$\because\ t_n=ar^{n-1},\quad \therefore\ t_6=1.2^5=32.$

**উদা**. 2. Find the 8th term of the series $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27},\cdots$.

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}$ এবং

পদসংখ্যা $n=8$.

$\because\ t_n=ar^{n-1},\quad \therefore\ t_8=1.(-\frac{1}{3})^7=-\dfrac{1}{3^7}=-\dfrac{1}{2187}.$

**উদা**. 3. Find the $p$th term of the series 4, 8, 16,$\cdots$.

এখানে $a=4$, $r=\frac{8}{4}=2$ এবং $n=p$.

$\because\ t_n=ar^{n-1},\quad \therefore\ t_p=4.2^{p-1}=2^2.2^{p-1}=2^{p+1}.$

**উদা**. 4. Find the $n$th term of the series $1, -3, 9, -27,\cdots$

এখানে $a=1$, $r=\frac{-3}{1}=-3$.

$\therefore\ t_n=ar^{n-1}=1.(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}.$

[ **দ্রষ্টব্য**ঃ এখানে উত্তরটি ঋণাত্মক বা ধনাত্মক তাহা নির্ণয় করা যায় না। $n$-এর মান অযুগ্ম হইলে $n-1$ যুগ্ম হইবে এবং তখন $(-3)^{n-1}$ এর মান ধনাত্মক হইবে। আর $n$ যুগ্মসংখ্যা হইলে $(-3)^{n-1}$ ঋণসংখ্যা হইবে। ]

**উদা**. 5. Find the $n$th term of the series

$$\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots \qquad \text{[C. U.]}$$

এখানে প্রথম পদ $a=\sqrt{3}$, সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}.$

$$\therefore\ t_n=ar^{n-1}=\sqrt{3}.(\tfrac{1}{3})^{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}=3^{\frac{3}{2}-n}.$$

**উদা. 6.** Find the common ratio of the G. P. of which the first term is 2 and the 10th term is 1. [C. U. '25]

এখানে প্রথম পদ $a=2$, $t_{10}=1$ ; মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\because \quad t_n \equiv ar^{n-1}, \quad \therefore \quad t_{10}=2r^9$, বা, $1=2r^9$

বা, $r^9=\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad r=\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$.

**উদা. 7.** Find the 9th term of the G. P. of which the 4th and 11th terms are 2 and $\frac{1}{64}$ respectively.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $t_4=2$, অর্থাৎ $ar^3=2 \cdots (1)$

এবং $t_{11}=\frac{1}{64}$, অর্থাৎ $ar^{10}=\frac{1}{64} \cdots (2)$

এক্ষণে, $(2) \div (1)$ করিয়া পাই $r^7=\frac{1}{128}=(\frac{1}{2})^7, \quad \therefore \quad r=\frac{1}{2}$.

এক্ষণে (1) হইতে $a(\frac{1}{2})^3=2$, বা, $\frac{1}{8}a=2$, $\therefore \ a=16$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় } t_9=ar^8=16\times\frac{1}{2^8}=2^4\times\frac{1}{2^8}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

**উদা. 8.** Find the series in G. P. whose 5th term is 16 and 9th term is 256.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^4=16 \cdots (1)$ এবং $ar^8=256 \cdots (2)$.

এখন (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $r^4=16, \quad \therefore \quad r=\pm 2$.

এক্ষণে (1) হইতে $a.\ 16=16, \quad \therefore \quad a=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর শ্রেণী $=1, 2, 4, 8, \cdots$ অথবা $1, -2, 4, -8, \cdots$

**উদা. 9.** Which term of the series $9, 3, 1, \cdots$ is $\frac{1}{243}$ ?

মনে কর, $\frac{1}{243}$ শ্রেণীটির $n$-তম পদ। এস্থলে প্রথম পদ $a=9$, এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \quad ar^{n-1}=\frac{1}{243}$, বা $9.(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{243}$

বা, $3^2\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{243}$, বা, $\frac{1}{3^{n-3}}=\frac{1}{3^5}$, বা, $3^{n-3}=3^5$

$\therefore \quad n-3=5, \quad \therefore \quad n=8$. অতএব $\frac{1}{243}$ শ্রেণীটির অষ্টম পদ।

উদা. 10. If there are 6 terms in a G. P., prove that the product of the first and last is equal to the product of the third and fourth. [ P. U. ]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$, এখানে শেষ পদ $t_6=ar^5$.

$\therefore$ প্রথম ও শেষ পদের গুণফল $=a\times ar^5=a^2r^5$.

আবার তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফল $=ar^2\times ar^3=a^2r^5$.

$\therefore$ প্রথম পদ $\times$ শেষ পদ $=$ তৃতীয় পদ $\times$ চতুর্থ পদ।

উদা. 11. Show that the product of any two terms of a G. P., equidistant from the beginning and the end, is constant. [ D. B. '31 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, শেষ পদ $=b$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

প্রথম ও শেষ দিক হইতে $p$-তম পদ লইয়া পরীক্ষা করা যাউক। প্রথম দিক হইতে $p$-তম পদ $=ar^{p-1}$ এবং শেষ দিক হইতে ধরিয়া পূর্বের $p$-তম পদ $=\frac{b}{r^{p-1}}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{p-1}\times\frac{b}{r^{p-1}}=ab=$ ধ্রুবক।

উদা 12. If the $p$th and the $q$th terms of a G. P. be $c$ and $d$ respectively, find the first term and the common ratio. [ C. U. '34 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^{p-1}=c\cdots(1)$ এবং $ar^{q-1}=d\cdots(2)$

এক্ষণে, $(1)\div(2)$ করিয়া $\frac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}}=\frac{c}{d}$, বা $r^{p-q}=\frac{c}{d}$, $\therefore\ r=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

এখন (1) হইতে পাই $a\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}=c$.

$$\therefore \quad a=c\times\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}=c\times\frac{d^{\frac{p-1}{p-q}}}{c^{\frac{p-1}{p-q}}}=c^{1-\frac{p-1}{p-q}}\times d^{\frac{p-1}{p-q}}$$

$$=c^{\frac{1-q}{p-q}}.\,d^{\frac{p-1}{p-q}}=(c^{1-q}.d^{p-1})^{\frac{1}{p-q}}.$$

**উদা. 13.** In a G.P. if the $(p+q)$th term is $m$ and $(p-q)$th term is $n$, find the $p$th and $q$th terms.

[ B. U. 1888 ; C. U. '34, '42 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore \quad t_{p+q}=m$ অর্থাৎ $ar^{p+q-1}=m\cdots(1)$

এবং $t_{p-q}=n$ অর্থাৎ $ar^{p-q-1}=n\cdots(2)$

$\therefore$ (1)÷(2) করিয়া $r^{p+q-1-p+q+1}=\frac{m}{n}$, বা, $r^{2q}=\frac{m}{n}$, $\therefore r=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}$

এক্ষণে (1) হইতে $a\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p+q-1}=m$, বা, $a.\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}=m$

$$\therefore \quad a=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় $t_p=ar^{p-1}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}\times\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p-1}$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}.\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1+1-p}{2q}}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{q}{2q}}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}=m\times\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$$

$=m^{\frac{1}{2}}.n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}.$ অনুরূপে $t_q=a.r^{q-1}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}.$

[ দ্রষ্টব্য : $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{-\left(\frac{1-p}{2q}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-p}{2q}}}=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}.$

এইরূপে লেখা যায়। ]

### Exercise 5

1. Find the 6th term of the series 4, 8, 16,$\cdots$

2. Find the 9th term of 1, $-3$, 9,$\cdots$

3. Find the 7th term of $\frac{5}{4}$, 1, $\frac{4}{5}\cdots$

4. Find the $n$th term of 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$,$\cdots$

5. What is the $n$th term of 16, 8, 4,$\cdots$ ?

6. Find the $p$th term of the series 3, $-9$, 27,$\cdots$

7. Find the 7th term of the G. P. of which the first term is 9 and the common ratio is $-\frac{1}{3}$.

8. The common ratio and the 6th term of a G. P., are $\frac{1}{2}$ and 1 respectively. Find its 11th term.

9. The 4th term of a G. P. is 8 and the 9th term is 256, find the series.

10. The 10th term of a G. P. is $\frac{1}{2}$ and the 14th term is $\frac{1}{32}$, find the 17th term.

11. The first two terms of a G. P. are 3 and 1. Write down the 10th term. [C. U. '13]

12. The 5th term of a G. P. is 48 and the 12th term 6144. Find the 1st term and the common ratio. [D. B. '28]

13. Which term of the series 128, 64, 32,$\cdots$is $\frac{1}{2}$ ?

14. Is 320 a term of the series 5, $-10$, 20,$\cdots$ ?

15. Find the 10th and $n$th terms of the G. P. of which the $r$th term is $2^{r-1}$.

16. If the $p$th and $q$th terms of a G. P. are $a$ and $b$ respectively, find its $n$th term.

## গুণোত্তরীয় মধ্যক ( Geometric Mean )

16. (1) যদি তিনটি রাশি গুণোত্তরীয় শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যম রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

(2) কতকগুলি রাশি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের ততগুলি গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

### উদাহরণমালা 8

**উদা. 1.** Find the geometric mean between $a$ and $b$.

[ C. U. '48 ]

মনে কর, গুণোত্তরীয় মধ্যকটি $m$, সুতরাং $a$, $m$, $b$ গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিল। $\therefore \ \dfrac{m}{a}=\dfrac{b}{m}$ [ $\because$ প্রত্যেকটি সাধারণ অনুপাতের সমান ]

বা, $m^2=ab$, $\therefore \ m=\pm\sqrt{ab}$.

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে দেখা গেল দুইটি রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক তাহাদের গুণফলের বর্গমূলের সমান। ইহা মনে রাখিবে। ]

**উদা. 2.** Insert $n$ geometric means between $a$ and $b$.

এখানে প্রথম পদ $a$, শেষ পদ $b$ এবং উহাদের মধ্যস্থিত $n$-সংখ্যক মধ্যক লইয়া একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী হইবে এবং তাহাদের পদসংখ্যা হইবে $n+2$. উহার শেষ পদ বা $(n+2)$তম পদ $b$.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore \ b=ar^{n+1}$, বা $r^{n+1}=\dfrac{b}{a}$, $\therefore \ r=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \ldots\ldots, a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$.

উদা. 3. Insert 3 geometric means between 2 and 162.
[ C. U. '30, '49 ]

2 ও 162র মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাইলে 5 পদযুক্ত একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী হইবে। তাহার প্রথম পদ 2, এবং পঞ্চম পদ 162.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\because\ t_5=162,\ \therefore\ ar^4=162,$ বা $2r^4=162,$

বা, $r^4=81=(\pm 3)^4,\quad \therefore\ r=\pm 3.$

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=2\times 3$ বা $2\times -3\ =6$ বা $-6$

দ্বিতীয় মধ্যক $=6\times 3$ বা $-6\times -3=18$ বা $18$

তৃতীয় মধ্যক $=18\times 3$ বা $18\times -3\ =54$ বা $-54$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকত্রয় $=6, 18, 54$ অথবা $-6, 18, -54.$

উদা. 4. Insert 5 geometric means between $3\frac{5}{9}$ and $40\frac{1}{2}$.
[ D. B. '35 ]

এখানে প্রদত্ত পদদ্বয় মধ্যবর্তী 5টি মধ্যক সমেত একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করে। উহার প্রথম পদ $3\frac{5}{9}$, পদসংখ্যা $=5+2=7$.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

এখানে $t_7=40\frac{1}{2},\ a=3\frac{5}{9}=\frac{32}{9},\quad \therefore\ ar^{7-1}=40\frac{1}{2},$

বা, $\frac{32}{9}.r^6=\frac{81}{2},$ বা, $r^6=\frac{81\times 9}{2\times 32}=\frac{3^6}{2^6}=(\frac{3}{2})^6,\quad \therefore\ r=\pm\frac{3}{2}.$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=5\frac{1}{3}, 8, 12, 18, 27$ ;

অথবা, $-5\frac{1}{3}, 8, -12, 18, -27.$

উদা. 5. The arithmetic mean between two numbers is 15 and their geometric mean is 9. Find the numbers.
[ C. U. '26 ]

মনে কর, সংখ্যা দুইটি $a$ ও $b$.

$\because$ $a$ ও $b$ এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যকটি $=\frac{a+b}{2},$

$\therefore$ এখানে $\frac{a+b}{2}=15,$ বা $a+b=30\cdots(1)$

আবার, $\because$ $a$ ও $b$-এর মধ্যস্থিত গুণোত্তরীয় মধ্যকটি $= \pm \sqrt{ab}$

$\therefore$ এখানে $\pm\sqrt{ab}=9$, $\therefore$ $ab=81 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=30^2-4\times81=900-324=576$,

$\therefore$ $a-b=\pm\sqrt{576}=\pm24 \cdots\cdots(3)$

এখন (1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই $a=27$ এবং $b=3$,

অথবা, $a=3, b=27$ [ যদি $a-b=-24$ হয় ]

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 27 ও 3, অথবা, 3 ও 27.

**উদা. 6.** Show that the arithmetic mean of any two real positive quantities is greater than their geometric mean.

[ C. U. '28, '39, '41, '44, '47, '48 ; G. U. '52 ]

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় $a$ ও $b$.

$\therefore$ উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক $=\frac{a+b}{2}$, এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\pm\sqrt{ab}$.

এক্ষণে, $\frac{a+b}{2}-(\pm\sqrt{ab})=\frac{a+b\mp2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})^2}{2}$, এখানে লবটি পূর্ণবর্গ বলিয়া ইহা একটি ধনরাশি।

$\therefore$ $\frac{a+b}{2}>\pm\sqrt{ab}$, অর্থাৎ, সমান্তরীয় মধ্যক > গুণোত্তরীয় মধ্যক।

**উদা. 7.** Prove that the product of the $n$ geometric means between $a$ and $b$ is the $n$th power of the single mean between them.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$a$ ও $b$র মধ্যবর্তী মধ্যকটি $=\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ ঐ মধ্যকটির $n$-তম ঘাত $=\{(ab)^{\frac{1}{2}}\}^n=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এখন $n$-সংখ্যক মধ্যকগুলি $=ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots, \frac{b}{r^3}, \frac{b}{r^2}, \frac{b}{r}$.

মনে কর, উহাদের গুণফল $=p$. প্রমাণ করিতে হইবে $p=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এক্ষণে, $p=ar\times ar^2\times ar^3\times\cdots\cdots\times\frac{b}{r^3}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r}$

এবং $p=\frac{b}{r}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r^3}\times\cdots\cdots\cdots\times ar^3\times ar^2\times ar$ (উল্টাইয়া লিখিয়া)

$\therefore$ ( গুণ করিয়া ) $p^2=ab\times ab\times ab\times\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=(ab)^n,\quad\therefore\quad p=(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

[ **দ্রষ্টব্য** : এই প্রণালীটি বুঝিয়া লও। এখানে $a$ প্রথম পদ, $b$ শেষ পদ এবং $r$ সাধারণ অনুপাত বলিয়া প্রথম মধ্যক $ar$, দ্বিতীয় মধ্যক $ar^2$, তৃতীয় মধ্যক $ar^3\cdots$এইভাবে লেখা যায়। আবার শেষ দিক হইতে ধরিলে শেষ মধ্যক অর্থাৎ $b$র পূর্বপদ $=\frac{b}{r}$, তার আগের মধ্যক $\frac{b}{r^2}$, ····· এইভাবে লেখা হইল। উপরের গুণটি লক্ষ্য কর—প্রথম পংক্তির $ar$এর সহিত দ্বিতীয় পংক্তির $\frac{b}{r}$ গুণ করিয়া হয় $ab$, এইরূপে $ar^2\times\frac{b}{r^2}=ab$ ইত্যাদি হইল। ]

**উদা.** 8. A is the arithmetic mean and G the geometric mean of two unequal positive real numbers $p$ and $q$. Prove that $A>G>\frac{G^2}{A}$. [ G. U. '50 ]

এখানে $A=p$ ও $q$ এর সমান্তরীয় মধ্যক $=\frac{p+q}{2}$

এবং $G=$,, ,, ,, গুণোত্তরীয় ,, $=\sqrt{pq}$

$\therefore\quad\frac{G^2}{A}=\frac{pq}{\frac{p+q}{2}}=\frac{2pq}{p+q}=k$ ( মনে কর )।

এক্ষণে, $\frac{p+q}{2}-\sqrt{pq}=\frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$, ইহা ধনাত্মক বলিয়া $\frac{p+q}{2}>\sqrt{pq}$ অর্থাৎ $A>G$ ( প্রমাণিত হইল )।

আবার, A. $k=\frac{p+q}{2}\times\frac{2pq}{p+q}=pq=G^2=G.G.$, কিন্তু $A>G$

প্রমাণিত হইয়াছে, $\therefore\ k<G$ অর্থাৎ $G>\frac{G^2}{A}$, $\therefore\ A>G>\frac{G^2}{A}$.

**উদা. 9.** The A. M. of $a$ and $b$ is to their G. M. as $m$ is to $n$. Show that $a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$.

[ A. U. 1889 ]

$a$ ও $b$-এর মধ্যে A. M. $=\frac{a+b}{2}$ এবং G. M. $=\sqrt{ab}$

$\therefore\ \frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}=m:n$ ( স্বীকার )

বা, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{m}{n}$, বা, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n}$ ( comp. & div. ),

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{m+n}{m-n}$, বা $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$ (বর্গমূল লইয়া)

বা, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$ ( com. & div.),

বা, $\frac{a}{b}=\frac{m+n+m-n+2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n+m-n-2\sqrt{m^2-n^2}}$ ( বর্গ করিয়া পাই )

বা, $\frac{a}{b}=\frac{2(m+\sqrt{m^2-n^2})}{2(m-\sqrt{m^2-n^2})}$

$$\therefore\ a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}.$$

**উদা. 10.** Show that if $p$ and $q$ are two unequal positive numbers then $A>G>H$, where A is the Arithmetic mean and G is the Geometric mean and $H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. [ E. B. S.B. '48 ]

এস্থলে $A=\frac{p+q}{2}$, $G=\sqrt{pq}$, এবং $H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}=\frac{2}{\frac{p+q}{pq}}=\frac{2pq}{p+q}$.

[ অবশিষ্ট অংশ উদা. 8-এর ন্যায় কর ]

## Exercise 6

Find the geometric mean between :—

1. 5 and 125. 2. $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{8}$. 3. $-3$ and $-27$.

4. $-6$ and $-2\frac{2}{3}$. 5. $x^3y$ and $xy^3$ ; $3\sqrt{3}$ and $9\sqrt{3}$.

6. Insert 3 geometric means between 4 and 324. [ C. U. 1890 ]

7. Insert 2 geometric means between 5 and 135. [ C. U. '16 ]

8. Insert 3 geometric means between 25 and 164025. [ Pat. U. '19 ]

9. Insert 3 geometric means between $\frac{1}{9}$ and 9. [ C. U. '14 ]

10. Insert 9 geometric means between $\frac{81}{16}$ and $\frac{64}{729}$. [ D. B. '30 ]

11. Show that the 2$n$th term of any G. P. is the mean proportional between the $n$th and 3$n$th terms. [ C. U. 1877 ]

12. In a G. P., show that the product of any two terms equidistant from a given term is equal to the square of the given term. [ C. U. '15 ]

[ **Hints :** মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং $m$-তম পদটি প্রদত্ত। এখানে $m$-তম পদ $=ar^{m-1}$, $\therefore$ উহার বর্গ $=(ar^{m-1})^2$. এক্ষণে $m$-তম পদের পূর্বের $p$-তম ও পরের $p$-তম পদের গুণফল $=(ar^{m-1})^2$ দেখাইতে হইবে। $m$-তম পদের পূর্বের $p$-তম পদ $=\dfrac{ar^{m-1}}{r^p}=ar^{m-1-p}$ এবং $m$-তম পদের পরবর্তী $p$-তম পদ $=a.r^{m-1}\times r^p=ar^{m-1+p}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{m-1-p}-ar^{m-1+p}=a^2r^{2m-2}=(ar^{m-1})^2$.]

13. If the A. M. and G. M. of two quantities be respectively A and G, shew that the quantities are $A\pm\sqrt{A^2-G^2}$.

**14.** If there are an odd number of terms in a G. P., show that the product of the first and the last terms is equal to the square of the middle term.

**15.** If the number of terms in a G. P. be even, prove that the product of its two middle terms is equal to the product of its first and last terms.

[ মনে কর, পদ-সংখ্যা $=2n$ ; $\therefore$ $n$-তম এবং $(n+1)$তম পদদ্বয় শ্রেণীটির দুইটি মধ্যপদ ( middle term ) হইবে। ]

**16.** Find two numbers such that their A. M. is 25 and G. M. 24.

## 17. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়

### উদাহরণমালা 9

**উদা. 1.** Find the sum of the first $n$ terms of a G. P.

[ C. U. '19, '29, '39, '40, '42 ; D. B. '32 ]

Or, Find the sum of $n$ terms of a G. P., being given the first term and the common ratio. [C. U. 17 ]

Or, Find the sum of the first $n$ terms of a G. P., the first term being $a$ and the common ratio $r$.

[ C. U. '16, '32, '35, '37 ; D. B. '39, '42 ]

Or, Find the sum of $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$to $n$ terms.

[ C. U. '31 ; D. B. '36 ]

[ উপরের প্রশ্নগুলি একই প্রশ্ন। ]

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং সমষ্টি $=s$. এখানে পদসংখ্যা $=n$, সুতরাং $n$-তম পদ $=ar^{n-1}$.

$$\text{অতএব } s=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}\ldots\ldots (1)$$

$$\text{এবং } (1)\times r \text{ করিয়া } \quad sr= \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots(2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $s-sr=a-ar,$

বা, $s(1-a)=a(1-r^n)$, $\therefore \quad s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots(3)$

আবার, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $sr-s=ar^n-a,$

$$\therefore \quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots(4)$$

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** (1) উপরে যোগফলের দুইটি সূত্র পাওয়া গেল। $r$-এর মান এক অপেক্ষা বেশি ও ধনরাশি হইলে দ্বিতীয় সূত্র, অন্যথা প্রথম সূত্র প্রয়োগ করিবে। (3) শেষ পদ যদি $l$ হয়, তবে $l=ar^{n-1}$ ; এখন সূত্রটি হইতে পাই $s=\dfrac{ar^n-a}{r-1}=\dfrac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}=\dfrac{lr-a}{r-1}$, শেষ পদ জানা থাকিলে এই সূত্র প্রয়োগ করিবে। (3) প্রতি অঙ্কে প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$, পদসংখ্যা $n$ কত তাহা উদা. 2-এর মত আগে লিখিবে। ]

উদা. 2. Find the sum of $1+2+4\cdots$to 20 terms. [C.U. '22]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$ এবং পদসংখ্যা $n=20.$

মনে কর, যোগফল $=s.$

$$\therefore \; s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1.$$

উদা. 3. Sum the series $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$to $n$ terms.

[ C. U. '12 ; '39 Sup. ]

এস্থলে $a=1$, $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$ ; মনে কর, সমষ্টি $=s.$

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(\frac{1}{3})^n\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 4. Find the sum of $1-3+9-27+\cdots$ to 13 terms.

এখানে $a=1$, $r=-3\div1=-3$, $n=13$.

$$\therefore\ s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-3)^{13}\}}{1-(-3)}=\frac{1+3^{13}}{4}=\tfrac{1}{4}(1+3^{13}).$$

উদা. 5. Find the sum of $1-2+4-8+\cdots$ to $n$ terms,

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=-2$.

$$\therefore\ s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{\{1-(-2)^n\}}{3}=\tfrac{1}{3}\{1-(-2)^n\}.$$

[ দ্রষ্টব্য : উদা. 4-এ $(-3)^{13}$ এর ঘাত অযুগ্ম বলিয়া উহা ঋণরাশি, সুতরাং $-(-3)^{13}=$ ধনরাশি হইয়াছে। আর উদা. 5-এ $(-2)^n$ ধনরাশি কি ঋণরাশি তাহা নির্ণয় করা যায় না, কারণ $n$ যুগ্ম হইলে উহা ধনরাশি এবং $n$ অযুগ্ম হইলে $(-2)^n$ ঋণরাশি হইবে। ]

উদা. 6. Find the sum of $3+6+12+\cdots+384$.

এখানে $a=3$, $r=6\div3=2$ এবং শেষ পদ $l=384$.

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় সমষ্টি}=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{2\times384-3}{2-1}=765.$$

উদা. 7. Find, without assuming any formula, the sum of $1+4+16+\cdots$ to 10 terms.

এস্থলে $a=1$, $r=4\div1=4$.

এক্ষণে $t_1=1$, $t_2=4=1.4^1$, $t_3=16=1.4^2$.

অতএব স্পষ্টতঃ $t_{10}=1.4^9=4^9$. মনে কর সমষ্টি $=s$.

$$\therefore\ s=1+4+4^2+\cdots\cdots+4^9 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\ 4s=\quad 4+4^2+\cdots\cdots+4^9+4^{10} \quad\cdots(2)$$

এখন (2) – (1) করিয়া $3s=4^{10}-1$, $\therefore\ s=\frac{1}{3}(4^{10}-1)$.

✱ উদা. 8. Find without assuming any formula, the sum of $n$ terms of $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$

[ C. U. '10, '18, '23, '38 ; D. B. '34, '40 ]

এখানে $t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2^1},\ t_3=\frac{1}{2^2},\quad \therefore$ স্পষ্টতঃ $t_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

মনে কর, সমষ্টি $=s$

$\therefore\quad s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdots(1)$

এবং $\frac{1}{2}s=\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\cdots(2)$

[ (1) কে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া ]

---

এক্ষণে, (1) − (2) করিয়া $\frac{1}{2}s=1-\frac{1}{2^n},\quad \therefore\quad s=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$

উদা. 9. Find the sum of $n$ terms of a G. P. of which the $4th$ term is $\frac{1}{27}$ and the $7th$ term is $\frac{1}{729}$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^3=\frac{1}{27}\cdots\cdots(1)$ এবং $ar^6=\frac{1}{729}\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$ করিয়া পাই $ar^6\div ar^3=\frac{1}{729}\div\frac{1}{27}$, বা $r^3=\frac{1}{27}=(\frac{1}{3})^3$

$\therefore\quad r=\frac{1}{3}.\quad \therefore$ (1) হইতে $a.(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27},\quad \therefore\quad a=1.$

$$\text{এক্ষণে } s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3^n-1}{2.3^{n-1}}.$$

উদা. 10. Find the sum of 10 terms of the series whose $pth$ term is $3^p+3p$.

এখানে $t_p=3^p+3p$, $\therefore$ $p=1, 2, 3, \cdots, 10$ বসাইয়া পাই

$$t_1=3^1+3.1$$
$$t_2=3^2+3.2$$
$$t_3=3^3+3.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{10}=3^{10}+3.10$$

$\therefore$ সমষ্টি $s=(3+3^2+\cdots+3^{10})+3(1+2+3+\cdots+10)$

$$=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}+3\times\tfrac{10}{2}(10+1)=\tfrac{3}{2}(3^{10}-1)+165=\frac{3^{11}+327}{2}.$$

উদা. 11. Find the sum of $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$. [ C. U. '30 ]

প্রদত্ত শ্রেণী হইতে দুইটি গুণোত্তর শ্রেণী পাওয়া যায়।

মনে কর, সমষ্টি $=s$,

$\therefore$ $s=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

$=(a+a^2+a^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত $)-(x+x^2+x^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)$

$$=\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{x(x^n-1)}{x-1}.$$

উদা. 12. How many terms of the series 1, 2, 4,$\cdots$must be taken so that the sum may be 255 ?

মনে কর, শ্রেণীটির $n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি 255. এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=2\div1=2$, এবং সমষ্টি $s=255$.

$\because$ $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=s$, $\therefore$ $\dfrac{1(2^n-1)}{2-1}=255$, বা $2^n-1=255$,

বা, $2^n=256=2^8$, $\therefore$ $n=8$, $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=8$.

উদা. 13. A certain sum of money produces every year twice as much interest as it did the previous year ; if it produces Rs. 50 in the first year, how much will it produce in 10 years ?

এখানে 10 বৎসরের মোট সুদ

$=(50+100+200+\cdots 10$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত) টাকা

$=\frac{50(2^{10}-1)}{2-1}$ টা. $=50(2^{10}-1)$ টা. $=51150$ টাকা।

**Exercise 7**

Find the sum of :—

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$ to 8 terms. [ C. U. '21 ]
2. $128+64+32+\cdots$ to 9 terms.
3. $1+3+9+27+\cdots\cdots$ to $n$ terms. [ C. U. '24, '47 ]
4. $1-3+9-27+\cdots\cdots$ to $2n$ terms.
5. $2+1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ to 8 terms.
6. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
7. $\frac{1}{\surd 3}+1+\surd 3+3+\cdots\cdots$ to 18 terms.
8. $1+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1}+\cdots\cdots$ to 10 terms.
9. $\dot{}5+\dot{}05+\dot{}005+\cdots\cdots$ to $(n-1)$ terms.
10. $\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots\cdots$ to $n$ terms. [C. U. '11]
11. $3-6+12-\cdots-384$.
12. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{256}$.

Find the sum of the following without assuming any formula :—

13. $4+2+1+\cdots\cdots$ to 10 terms.
14. $2+4+8+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
15. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots$ to $n$ terms. [ C. U. '12 ]
16. $6+12+24+\cdots\cdots+768$.

17. The sum of the first and second terms of a G. P. is 12, and that of its fourth and fifth terms is 324. Find the sum of the first six terms of the series. [ E. B. S. B. '49 ]

18. Find the sum of 25 terms of a G. P. whose 4th term is 20 and 7th term 160. [ D. B. '45 ]

19. A mango tree yields every year twice as many mangoes as it did the previous year. If it yields 100 mangoes in the first year, how many mangoes will it yield in 8 years ?

20. Divide 21 into three parts such that they are in G.P. and their product is 64. [ G. U. '53 ]

## 18. প্রগতি সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

### উদাহরণমালা 10

উদা. 1. If $a$, $b$, $c$, $d$ are in G. P., show that $a^2+b^2$, $b^2+c^2$ and $c^2+d^2$ are also in G. P. [ C. U. '19 ]

এস্থলে $a$, $b$, $c$, $d$ গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে। মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$. $\therefore$ $b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$.

$$\therefore \; a^2+b^2=a^2+a^2r^2=a^2(1+r^2),$$
$$b^2+c^2=a^2r^2+a^2r^4=a^2r^2(1+r^2),$$
$$c^2+d^2=a^2r^4+a^2r^6=a^2r^4(1+r^2).$$

এক্ষণে, $a^2(1+r^2)$, $a^2r^2(1+r^2)$, $a^2r^4(1+r^2)$ এই পদ তিনটি গুণোত্তর শ্রেণী, কারণ ইহাদের সাধারণ অনুপাত $r^2$.

$\therefore$ $a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+d^2$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 2. If $a, b, c$ are in G.P., prove that $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ are in A. P. [ D. B. '46 ; G. U. '48 ]

মনে কর, $a, b, c$ এই প্রদত্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত $r$.

$$\therefore \quad b=ar, c=ar^2.$$

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে যদি প্রমাণ করা যায় যে

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2b}\times 2=\frac{1}{b}.$$

এক্ষণে, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}$

$$=\frac{r+1}{ar(1+r)}=\frac{1}{ar}=\frac{1}{b}.$$

অতএব, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 3. If $a, b, c$ be in A. P. and $a, b, d$ in G. P., show that $a, a-b, d-c$ are in G. P. [ C. U. '10 ]

$\because$ $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a+c=2b$, বা $a-2b=-c \cdots(1)$

আবার, $\because$ $a, b, d$ গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore$ $b^2=ad \cdots (2)$.

$a, a-b, d-c$, গুণোত্তর শ্রেণী বলা যাইবে, যদি প্রমাণ করা যায় যে $(a-b)^2=a(d-c)=ad-ac$.

এক্ষণে, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=b^2+a(a-2b)$

$$=ad+a\times -c=ad-ac \text{ [ (1) ও (2) হইতে ]}$$

$\therefore$ $a, a-b, d-c$ গুণোত্তর শ্রেণী হইল।

[ দ্রষ্টব্য : উদা. 1 ও উদা. 2-এ প্রদর্শিত প্রণালীতেও এই অঙ্ক কষা যায়। ]

উদা. 4. Insert between 6 and 16 two numbers such that the first three may be in A. P. and the last three in G. P.

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় $b$ ও $c$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে 6, $b$, $c$ সমান্তর শ্রেণী$\cdots$(1)

এবং $b$, $c$, 16 গুণোত্তর শ্রেণী$\cdots\cdots$(2)

(1) হইতে পাই $2b=6+c\cdots(3)$, এবং (2) হইতে পাই $c^2=16b\cdots(4)$.

এখন (3) ও (4) হইতে $c^2=8.2b=8(6+c)=48+8c$,

বা, $c^2-8c-48=0$, বা $(c-12)(c+4)=0$, $\therefore\ c=12$ বা $-4$.

যদি $c=12$ হয়, তবে (3) হইতে পাই $b=9$,

যদি $c=-4$ হয়, " " " " $b=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=9$ ও 12, অথবা 1 ও $-4$.

উদা. 5. Insert 2 numbers between 5 and 135 so that the four may form a G. P. [ C. U. '16 ]

মনে কর, উৎপন্ন গুণোত্তর শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত $r$, প্রথম পদ $=5$.

$\therefore\ 135=t_4=5r^3$, বা $r^3=27=(3)^3$, $\therefore\ r=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=5\times3$ ও $5\times3^2=15$ ও 45.

উদা. 6. The sum of three quantities in G. P. is $24\frac{4}{5}$ and their product is 64 ; find them. [ A. U. ; E. B. S. B '50 ]

মনে কর, সংখ্যাত্রয় $=\frac{a}{r}$, $a$, $ar$ ;

$\therefore\ \frac{a}{r}\times a\times ar=64\cdots(1)$ এবং $\frac{a}{r}+a+ar=24\frac{4}{5}\cdots(2)$.

এখন, (1) হইতে $a^3=64$, $\therefore\ a=4$.

(2) হইতে $\frac{4}{r}+4+4r=\frac{124}{5}$,

বা, $\frac{4}{r}+4r=\frac{124}{5}-4=\frac{104}{5}$, বা, $\frac{1}{r}+r=\frac{26}{5}$,

বা, $5r^2-26r+5=0$, বা $(r-5)(5r-1)=0$, $\therefore\ r=5$ বা $\frac{1}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $=\frac{4}{5}$, 4, 20 অথবা 20, 4, $\frac{4}{5}$.

উদা. 7. If $a, b, c$ be respectively the $p$th, $q$th and $r$th terms of a G. P., prove that $a^{q-r}. b^{r-p}. c^{p-q}=1$.

[ C. U. '51 ; G. U. '50 ; W. B. S. F. '53 ]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

$\therefore \quad a=fd^{p-1}, b=fd^{q-1}$ এবং $c=fd^{r-1}$.

$\therefore \quad a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(fd^{p-1})^{q-r}(fd^{q-1})^{r-p}(fd^{r-1})^{p-q}$

$=f^{q-r}.d^{pq-q-pr+r}\times f^{r-p}.d^{qr-r-pq+p}\times f^{p-q}.d^{rp-p-qr+q}$

$=f^{q-r+r-p+p-q}\times d^{pq-q-pr+r+qr-r-pq+p+rp-p-rq+q}$

$=f^{0}\times d^{0}=1\times 1=1.$

উদা. 8. If $a, b, c$ be in A. P., and $x, y, z$ in G. P., prove that $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$. [ C. U. '44, '50 ; G. U. '49 ]

$\because \quad a, b, c$ সমান্তর শ্রেণী, $\therefore \quad 2b=a+c$, বা $a-b=b-c$,

$\because \quad x, y, z$ গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore \quad y^2=xz$.

এক্ষণে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}.=x^{a-b}.y^{c-a}.z^{a-b}$ $[\because b-c=a-b]$

$=(xz)^{a-b}.y^{c-a}=(y^2)^{a-b}.y^{c-a}=y^{2a-2b+c-a}$

$=y^{a+c-2b}=y^{2b-2b}=y^{0}=1.$

উদা. 9. Sum to $n$ terms the series $4+44+444\cdots\cdots$

[ Pat. U. '18 ]

$s=4+44+444+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=4(1+11+111+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}(9+99+999+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}

$=\frac{4}{9}\{10+10^2+10^3+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত) $-$ ($n$ সংখ্যক 1)}

$=\frac{4}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}.$

উদা. 10. Sum to $n$ terms $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots$

[ C. U. (D. M. H.) '51 ]

$s=\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(1-\cdot1)+(1-\cdot01)+(1-\cdot001)+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(n$ সংখ্যক $1)-(\cdot1+\cdot01+\cdot001+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)$

$=n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\right)$

$$=n-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}=n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

উদা. 11. Sum $1+4+10+22+46+\cdots$to $n$ terms.

মনে কর, সমষ্টি $=s$ এবং $n$-তম পদ $=t_n$.

$s=1+4+10+22+\cdots+t_n$

আবার $s=\quad 1+\ 4+10+\cdots+t_{n-1}+t_n$ [এক পদ সরাইয়া লেখা হইল]

( বিয়োগ ) $0=(1+3+6+12+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\ t_n=1+3+6+12+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=1+\{3+6+12+\cdots(n-1)$* সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$$=1+\frac{3(2^{n-1}-1)}{(2-1)}=1+3(2^{n-1}-1)=3.2^{n-1}-2.$$

এখন $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$t_1=3.1\ -2$

$t_2=3.2\ -2$

$t_3=3.2^2-2$

...............

$t_n=3.2^{n-1}-2$

$\therefore\ s=3(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n$

$=3(1+2+2^2+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-2n=3\times\frac{1(2^n-1)}{2-1}-2n$

$=3.2^n-3-2n.$

*এখানে 1 ব্যতীত অন্য পদগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া শ্রেণীর পদসংখ্যা $n-1$ ধরা হইল।

উদা. 12. Sum to $n$ terms $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots$ [ C. U. ]

$$s=1+\tfrac{3}{2}+\tfrac{7}{4}+\tfrac{15}{8}+\cdots+t_n$$

আবার, $s= \quad 1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\cdots+t_{n-1}+t_n$

(বিয়োগ) $0=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=\dfrac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

এখন $n=1, 2, 3,\cdots,n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=2(1-\tfrac{1}{2})$$

$$t_2=2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$$

$$_3=2\left(1-\frac{1}{2^3}\right)$$

..................

$$t_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\therefore\quad s=2\left\{n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

$$=2\left\{n-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right\}=2\left\{n-1+\frac{1}{2^n}\right\}=2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

উদা. 13. Sum $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots$to $n$ terms.

এখানে $t_n=n.a^{n-1}$.

$$s=1+2a+3a^2+4a^3+\cdots+n.a^{n-1}$$

এবং $sa= \qquad a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+n.a^n$

[ $a$ দ্বারা গুণ করিয়া ]

(বিয়োগ) $s(1-a)=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})-na^n$

$$=\frac{1(1-a^n)}{1-a}-na^n.\quad\therefore\quad s=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}.$$

উদা. 14. Sum to $n$ terms $(1)+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+\cdots\cdots$ [C. U. '31]

এখানে $n$-তম পদ অর্থাৎ $t_n=(1+3+3^2+3^3+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$=\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)=\frac{1}{2}.\,3^n-\frac{1}{2}.$$

এখন $n=1, 2, 3,\ldots,n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.3^1-\tfrac{1}{2}$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.3^2-\tfrac{1}{2}$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^3-\tfrac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\quad s=\frac{1}{2}\left(3+3^2+3^3+\cdots+3^n\right)-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\left(3^n-1\right)-\frac{n}{2}=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}\left(3^{n+1}-3-2n\right).$$

উদা. 15. If $a, b, c$ be in G. P., and $x, y$ be the arithmetic means between $a, b$ and $b, c$ respectively, prove that $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ and $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$ [P. U. 1892]

$\because a, b, c$ গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore b=ar, c=ar^2$ [$r=$ সাধারণ অনুপাত]

আবার, $\because x$ ও $y$ যথাক্রমে $a, b$ এবং $b, c$-র সমান্তরীয় মধ্যক,

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}\ \text{ এবং }\ y=\frac{b+c}{2}.$$

এক্ষণে, $$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{a}{\frac{a+b}{2}}+\frac{c}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)=2\left(\frac{a}{a+ar}+\frac{ar^2}{ar+ar^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{ar+ar^2}{ar+ar^2}\right)=2.$$

আবার, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$

$$=2\left(\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}\right)=2\left(\frac{r+1}{ar+ar^2}\right)$$

$$=2\frac{r+1}{ar(r+1)}=\frac{2}{ar}=\frac{2}{b}.$$

* উদা. 16. If S be the sum, P the product, and R the sum of the reciprocals of $n$ terms in G. P., prove that $\left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2$.

[ C. U. 1883 ]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$, পদসংখ্যা $=n$ এবং শেষ পদ $=l$ ; সুতরাং $S=a+ar+\ldots+l=\frac{rl-a}{r-1}$.

$\therefore$ অন্যোন্যক পদগুলি $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{l}$

$$\therefore \quad R=\frac{\frac{1}{r}\times\frac{1}{l}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{r}-1}=\frac{\frac{a-rl}{arl}}{\frac{1-r}{r}}=\frac{(a-rl)r}{(1-r)arl}=\frac{(rl-a)}{(r-1)al}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{S}{R}\right)^n=\left\{\frac{rl-a}{r-1}\times\frac{(r-1)al}{(rl-a)}\right\}^n=(al)^n.$$

এক্ষণে, $P=a\times ar\times ar^2\times\ldots\times\frac{l}{r^2}\times\frac{l}{r}\times l$

আবার, $P=l\times\frac{l}{r}\times\frac{l}{r^2}\times\ldots\times ar^2\times ar\times a$ [ উল্টাইয়া লিখিয়া ]

$\therefore \quad P^2=al\times al\times al\times\ldots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=(al)^n$

$\therefore \quad \left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2.$

**উদা. 17.** Show that the $p$th, $q$th, $r$th terms of a geometrical progression are in geometrical progression if $p, q, r$ be in arithmetical progression. [ W. B. S. F. 1952 ]

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

$\therefore$ উহার $p$-তম পদ $=fd^{p-1}$, $q$-তম পদ $=fd^{q-1}$, এবং $r$-তম পদ $=fd^{r-1}$.

এক্ষণে, $fd^{p-1}$, $fd^{q-1}$, এবং $fd^{r-1}$ গুণোত্তর শ্রেণী হইবে,
যদি $(fd^{q-1})^2=fd^{p-1}\times fd^{r-1}$ হয়, অর্থাৎ যদি $f^2d^{2q-2}=f^2d^{p+r-2}$ হয়,
অর্থাৎ যদি $d^{2q-2}=d^{p+r-2}$ হয়, অর্থাৎ যদি $2q-2=p+r-2$ হয়,
অর্থাৎ যদি $2q=p+r$ হয়, অর্থাৎ যদি $p, q, r$ সমান্তর শ্রেণী হয়।

## Exercise 8

1. If $x, y, z$ be in G. P., show that $x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)$
$=x^3+y^3+z^3$.

2. If $a, b, c, d$ be in G. P., prove that
   (i) $a^2-b^2$, $b^2-c^2$, $c^2-d^2$ are in G. P.
   (ii) $a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+cd$, $b^2+c^2+d^2$ are in G. P.
   (iii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.
   [ C. U. '43 ; D. B. '25, '26 ]

Find the sum of :—

3. $7+77+777+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
4. $2+22+222+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
5. $\cdot2+\cdot22+\cdot222+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
6. $1.2+2.3+4.4+8.5+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
7. $1+3+7+15+\cdots\cdots$ to $n$ terms. [ D. B. '25, '26, '38 ]
8. $1+4+13+40+121+\cdots\cdots$ to $n$ terms.
9. If $a$ be the first term of a G. P., $l$ the $n$th term and P the product of first $n$ terms, show that $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.
[ C. U. '18 ; D. B. '30, '33, '43, '47 ]

**10.** Sum to $n$ terms the series of which the $rth$ term is $2^r+2r$. [D. B. '41]

**11.** If of three consecutive terms of a G. P. the middle term is 6 and first and third terms are together equal to 15; find the series. [C. U. '32]

**12.** Sum to $n$ terms $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$

**13.** Three numbers whose sum is 15 are in A. P.; if 1, 4, and 19 be added to them respectively the results are in G. P. Find the numbers. [C. U. '50]

**14.** From three numbers in G. P. three other numbers in G. P. are subtracted and the remainders are found to be in G. P., prove that the three series must have the same common ratio. [B. U. 1890]

✳ **15.** If $s_1, s_2, s_3$ be respectively the sums of $n$, $2n$ and $3n$ terms of a G. P., prove that $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$.
[B. U. 1882]

**16.** What must be added to $x, y, z$ to bring them into G. P.?

**17.** If G be the geometric mean, and M and N be two A. M.'s between two given quantities, show that $G^2=(2M-N)(2N-M)$.

[ Hints : মনে কর, সংখ্যাদ্বয় $a, b$ : $\therefore\ G^2=ab$.
আবার, $\because$ $a$, M, N, $b$ সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a$, M, N, এবং M, N, $b$ দুইটি সমান্তর শ্রেণী। $\therefore$ $2M=N+a$ এবং $2N=M+b\ldots$ ]

**18.** If the A. M. between $p$ and $q$ be twice their G. M., then $\frac{p}{q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ or $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

[Hints : $\frac{p+q}{2}=\pm 2\sqrt{pq}$, বা $\frac{(p+q)^2}{4}=4pq$, বা $\frac{(p+q)^2}{4pq}=\frac{4}{1}\ldots(1)$.

$\therefore$ $\frac{(p+q)^2-4pq}{4pq}=\frac{3}{1}$ (by dividendo), বা $\frac{(p-q)^2}{4pq}=\frac{3}{1}\cdots(2)$.

$(1)\div(2)$ করিয়া $\dfrac{(p+q)^2}{(p-q)^2}=\dfrac{4}{3}$, বা $\dfrac{p+q}{p-q}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\therefore\ \frac{2p}{2q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\ (\text{ by comp. and div. }).\cdots$$

(2)-কে $\dfrac{(q-p)^2}{4pq}=3$ এইরূপ লিখিলে অনুরূপে হয় $\dfrac{p}{q}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ ]

19. Three numbers whose product is 512 are in G. P.; if 8 be added to the first and 6 to the second, the resulting numbers are in A. P. Find the numbers. [C. U. (High) '50]

## Harmonic Progression ( বিপরীত প্রগতি )

19. **সংজ্ঞা।** যদি কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত রাশিগুলির অন্যোন্যক-গুলি ( reciprocals ) সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীটি ( রাশিগুলি ) বিপরীত প্রগতিতে ( in Harmonic progression ) আছে বলা হয়।

যথা, $a, b, c, d,\cdots\cdots\cdots$ শ্রেণীটি বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে, যদি $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d},\cdots\cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী হয়।

Harmonic ( বা Harmonical ) Progressionকে সংক্ষেপে H. P. লেখা হয়; সুতরাং বিপরীত প্রগতিকে বিঃ প্রঃ লেখা যাইতে পারে।

**অনুসিদ্ধান্ত।** মনে কর $a, b, c$ পদ তিনটি বিঃ প্রঃ-এর তিনটি ক্রমিক পদ,

অতএব, এখানে $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ,

$\therefore\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\cdots$(A), বা $\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{b-c}{bc}$, বা $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}\cdots$(1)

আবার, (A) হইতে পাই $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\cdots\cdots$(2)

এবং $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{a+c}{ac}$, $\quad\therefore\ b=\dfrac{2ac}{a+c}\cdots\cdots$(3).

এক্ষণে, (1) হইতে এই সংজ্ঞা করা যায় যে, তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, যদি প্রথম রাশি ও তৃতীয় রাশির অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের সহিত দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অন্তরের অনুপাতের সমান হয়।

[ **দ্রষ্টব্য** : $a,\ a+b,\ a+2b,\cdots\cdots$ইত্যাদি যদি একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে $\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+2b},\cdots\cdots$ইত্যাদি বিঃ প্রঃ হইবে।

আবার, $a, a+b, a+2b,\cdots\cdots$শ্রেণীর $n$-তম পদ $a+(n-1)b$,

অতএব, বিঃ প্রঃ-এর $n$-তম পদ $=\frac{1}{a+(n-1)b}$. ]

## বিপরীত প্রগতির মধ্যক

**20.** তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে মধ্যের রাশিটিকে অন্য দুইটির বিপরীত মধ্যক ( Harmonic mean ) বলে। যথা $a$, $b$ ও $c$ বিঃ প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে $a$ ও $c$-এর বিপরীত মধ্যক $b$ হইবে।

অনুরূপে দেখ, আমরা দেখিয়াছি যে $a, b, c$ বিঃ প্রঃ-র তিনটি ক্রমিক পদ হইলে $b=\frac{2ac}{a+c}$ হয়।

অতএব, এখানে দুইটি পদের সহিত তাহাদের মধ্যকটির সম্বন্ধ পাওয়া গেল।

[ **দ্রষ্টব্য** : (1) বিপরীত প্রগতির কোন শ্রেণীর ( series ) অন্তর্গত পদগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর শ্রেণী হইয়া থাকে। অতএব, কোন বিঃ প্রগতির কোন একটি পদ ( যথা, $n$-তম ) নির্ণয়ের জন্য প্রথমে বিঃ প্রঃ শ্রেণীর পদগুলির অন্যোন্যকের $n$-তম পদ নির্ণয় করিয়া সেই পদটির অন্যোন্যকই হইবে বিঃ প্রগতির $n$-তম পদ।

(2) এই পদের মধ্যে $n$-সংখ্যক বিপরীত মধ্যক নির্ণয়েরও এই প্রণালী। সংজ্ঞা ভিন্ন অন্য কিছু পাঠ্য নহে বলিয়া বিপরীত প্রগতি বিষয়ে আর কিছু আলোচনা করা হইল না। ]

## Variation ( ভেদ )

তোমরা জান যে, যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত কোন একটি রাশির মান সর্বদা একই থাকে, অর্থাৎ অন্য রাশিগুলির মান পরিবর্তিত হইলেও ঐ রাশিটির মানের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে সেই রাশিটিকে **ধ্রুবক** ( constant ) বলা হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে ধ্রুবক রাশির মান অন্য কোন রাশির মানের উপর নির্ভর করে না।

কোন রাশিমালায় যে রাশিটির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চল** (variable) **রাশি** বা চল বলে।

21. **ভেদ**। দুইটি চল রাশির মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে একটির মান পরিবর্তিত হইলে তৎসঙ্গে অন্যটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে একটি চল রাশি **অন্যটির সহিত সরল ভেদে** আছে ( one quantity varies directly as the other ) বলা হয়।

কার্যতঃ "সরল ভেদে" না বলিয়া সংক্ষেপে 'ভেদে' আছে বলা হয়।

**দৃষ্টান্তঃ** (i) মনে, কর একটি ট্রেণ সমবেগে ( uniformly ) ঘণ্টায় 20 মাইল করিয়া যাইতেছে। যদি সময়টি দ্বিগুণ করিয়া 2 ঘণ্টা ধরা হয়, তবে দূরত্বও যাওয়া যাইবে 20 মাইলের দ্বিগুণ অর্থাৎ 40 মাইল। যদি সময় অর্ধেক ধরা হয়, তবে দূরত্বও অর্ধেক যাওয়া হইবে। অতএব, দেখা গেল যে এখানে সময়ের সহিত দূরত্ব সরল ভেদে আছে ( Distance covered **is directly proportional to** বা **varies directly as** the time )

(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r$ হইলে, উহার পরিধি $2\pi r$ এর সমান হয় ( $\pi$ এখানে ধ্রুবক )। অতএব, ব্যাসার্ধটিকে দ্বিগুণ, তিনগুণ করিলে, সঙ্গে সঙ্গে বৃত্তের পরিধিটিও মাপে দ্বিগুণ, তিনগুণ হইয়া যাইবে। এখানে বলা যাইবে যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ সরল ভেদে আছে।

22. **'ভেদ'-সূচক চিহ্ন**। ভেদ বুঝাইবার জন্য $\propto$ প্রতীক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। '$x$ varies as $y$' বুঝাইবার জন্য সংক্ষেপে $x \propto y$ লেখা হয় ( ইহার অর্থ $x$ ও $y$ সরল ভেদে অবস্থিত )।

উপরের প্রথম দৃষ্টান্তে মনে কর ট্রেণটি সমবেগে $x$ মাইল ( দূরত্ব ) $y$ ঘণ্টায় ( সময় ) যায়।

ট্রেণটি সমবেগে যাওয়ায় $\frac{x}{y}$ এই অনুপাতটি সর্বদা একই থাকিবে অর্থাৎ যদি $x$ ও $y$ সরল ভেদ থাকে, তবে $\frac{x\text{-এর যে কোন মান}}{y\text{-এর অনুরূপ মান}}$ সর্বদা একই থাকিবে।

অতএব, $\frac{x}{y}=$ধ্রুবক। মনে কর, $\frac{x}{y}=k$ (ধ্রুবক), সুতরাং $x=ky$. এই স্থলের ধ্রুবক $k$কে **ভেদ-ধ্রুবক** ( variation constant ) বলে।

**দ্রষ্টব্য :** যদি $k$ ধ্রুবক এবং $x=ky$ হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে, $x$-এর সহিত $y$-এর অথবা $y$-এর সহিত $x$-এর সরল ভেদ আছে।

আবার দেখ, $x=ky$ হইলে $y=\frac{1}{k}\times x$ হয়। এখানে $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক রাশি ; সুতরাং বুঝা গেল যে $x$ ও $y$-এর মধ্যে সরল ভেদ আছে। এখানে $\frac{1}{k}$ হইল ভেদ-ধ্রুবক। এই ধ্রুবক বিভিন্ন ভেদের পক্ষে বিভিন্ন ধরিতে হয়।

[ **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** দুইটি চলের মধ্যে একটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হইলে যদি অন্যটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় তাহা হইলেই তাহারা সরল ভেদে আছে বলা যাইবে না। ঐ হ্রাস বা বৃদ্ধি সর্বদা **একই অনুপাতে** হওয়া চাই, নতুবা উভয় চলের মধ্যে সরল ভেদ আছে এরূপ ধরা যাইবে না।

**দৃষ্টান্ত :** বর্গক্ষেত্রের বাহুর মাপ বাড়িলে উহার ক্ষেত্রফল বাড়িয়া থাকে, কিন্তু ঐ বাহু ও ক্ষেত্রফল সমানুপাতী নহে। কারণ, বর্গক্ষেত্রের বাহু দ্বিগুণ করিলে উহার ক্ষেত্রফল 4 গুণ হয়, বাহুটি তিনগুণ হইলে ক্ষেত্রফল 9 গুণ হইবে। ]

তোমরা জান যে $x=ky$ ( $k$ ধ্রুবক ) এই সমীকরণটির লেখ মূল বিন্দুগামী একটি সরল রেখা। অতএব, এই লেখস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate) উহার ভুজের (abscissa) সহিত সমানুপাতী। অতএব, বিপরীত ক্রমে আমরা

বলিতে পারি যে, দুইটি চলরাশির অনুরূপ মানগুলিকে যথাক্রমে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে, লেখটি যদি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে ঐ চল দুইটি সরল ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

23. **ভেদ-ধ্রুবকের মান নির্ণয়।** সরল ভেদে অবস্থিত দুইটি চলরাশির দুইটি অনুরূপ মান জানা থাকিলে উহাদের ভেদ-ধ্রুবকের ( variation constantএর ) মান নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ 1.** If $x$ varies directly as $y$, and $x=7$ when $y=13$, find (i) the value of the variation constant, (ii) the relation between $x$ and $y$ and (iii) the value of $x$ when $y=\frac{26}{35}$.

(i) $\because \quad x \propto y, \quad \therefore \quad x=ky$ ( $k$ একটি ধ্রুবক ).

$y=13$ হইলে $x=7$ হইবে ( স্বীকার ),

$\therefore \quad 7=k\times 13, \quad \therefore \quad k=\frac{7}{13}$. অতএব নির্ণেয় ভেদ-ধ্রুবক $=\frac{7}{13}$.

(ii) $x$ ও $y$এর মধ্যে $x=\frac{7}{13}y$ এই সম্বন্ধ বিদ্যমান।

(iii) এক্ষণে, $x=\frac{7}{13}y$ এই সমীকরণে $y$-এর মান $\frac{26}{35}$ বসাইয়া পাই $x=\frac{7}{13}\times y=\frac{7}{13}\times\frac{26}{35}=\frac{2}{5}$.

অতএব, $x$-এর নির্ণেয় মান $=\frac{2}{5}$.

**উদাহরণ 2.** The time of oscillation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 40 inches oscillates once in a second, what is the length of the pendulum oscillating once in 2·5 seconds ?

মনে কর $t=$ একবার দোলনের সময় এবং $l=$ দোলকের দৈর্ঘ্য। অতএব প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $t \propto \sqrt{l}$.

মনে কর $t=k\sqrt{l}$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )।

$\because \quad t=1$ হইলে $l=40$ হয়, $\quad \therefore \quad 1=k\sqrt{40}$, বা $k=\dfrac{1}{\sqrt{40}}$.

অতএব, $t=\frac{1}{\sqrt{40}}\times\sqrt{l}$, এই সমীকরণে $t=2{\cdot}5$ বসাইয়া পাই

$2{\cdot}5=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{40}}$, বা, $\frac{l}{40}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় $l=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times 40$ ই. $=250$ ইঞ্চি।

**অন্যোন্যক ( Reciprocal )**। তোমরা জান কোন সংখ্যার অন্যোন্যক বলিলে ( $1\div$ সেই সংখ্যা ) বুঝায়। অতএব, $\frac{2}{3}$ এর অন্যোন্যক $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$ এর অন্যোন্যক 5, 4 এর অন্যোন্যক $\frac{1}{4}$, $x$ এর অন্যোন্যক $\frac{1}{x}$ ইত্যাদি।

24. **ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation)**। যদি একটি রাশির মানের পরিবর্তন অন্য একটি রাশির অন্যোন্যকের মানের পরিবর্তনের সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশি দ্বিতীয় রাশির সহিত অথবা দ্বিতীয় রাশি প্রথম রাশির সহিত **ব্যস্ত ভেদে** বা **বিপরীত ভেদে** আছে বলা হয়।

যদি $a$ ও $b$ ব্যস্ত ভেদে থাকে ( অর্থাৎ $a$ varies inversely as $b$), তবে লেখা হইবে $a\propto\frac{1}{b}$ ( কারণ $b$ এর অন্যোন্যক $\frac{1}{b}$ )।

অতএব, এখানে $a=k.\frac{1}{b}$ ( $k$ একটি ধ্রুবক ), $\therefore\ ab=k.$

আবার, $\because\ ab=k$, $\therefore\ b=k.\frac{1}{a}$; অতএব, বিপরীতক্রমে বলা যায় $b$ varies inversely as $a$ ($b$, $a$-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে )।

$a$ ও $b$ এর মধ্যে ব্যস্ত ভেদ থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, $a$ এর মান বাড়িলে $b$ এর মান কমিবে এবং $b$ এর মান বাড়িলে $a$ এর মান কমিবে ( একই অনুপাতে )।

**দ্রষ্টব্য :** (1) কোন নির্দিষ্ট বেগে কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে যে সময় লাগে, তাহার **দ্বিগুণ** বেগে গেলে **অর্ধেক** সময় লাগিবে, তাহার **এক-তৃতীয়াংশ** বেগে গেলে **তিনগুণ** সময় লাগিবে। অর্থাৎ বেগকে যত দিয়া গুণ করিবে, সময়কে তত দিয়া ভাগ করিতে হইবে। অতএব বেগ ও সময় এখানে ব্যস্ত ভেদে আছে।

(2) একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বিভিন্ন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলি প্রস্থগুলির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

(3) কোন কাজ সম্পন্ন করিবার জন্য কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক লোকের যত দিন সময় লাগে, তাহার দ্বিগুণ লোক কাজ করিলে তাহার অর্ধেক দিন সময় লাগিবে। ইত্যাদি।

[ দ্রষ্টব্য : (1) যদি $a$, $b$-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে $a$, $\frac{1}{b}$ -এর সহিত সরল ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

(2) দুইটি রাশি পরস্পর ব্যস্ত ভেদে থাকিলে তাহাদের গুণফল ধ্রুবক হইবে। বিপরীতক্রমে, দুইটি রাশির গুণফল ধ্রুবক হইলে, রাশি দুইটি ব্যস্ত ভেদে আছে বলিতে হইবে। ]

✓ **উদা. 1** If $x \propto y$ and $a \propto \frac{1}{b}$, shew that $xa \propto \frac{y}{b}$.

$\because\ x \propto y,\ \therefore\ x = my$ ( $m$ একটি ধ্রুবক ) ;

আবার $\because\ a \propto \frac{1}{b},\ \therefore\ a = n.\frac{1}{b} = \frac{n}{b}$ ( $n$ একটি ধ্রুবক )।

এক্ষণে, $xa = my \times \frac{n}{b} = mn\frac{y}{b}$. অতএব $\because\ mn$ একটি ধ্রুবক, $\therefore\ xa \propto \frac{y}{b}$.

[ বি. দ্রষ্টব্য : এখানে $\left(x \propto y \text{ এবং } a \propto \frac{1}{b}\right)$ এই দুই ক্ষেত্রে দুইটি পৃথক্ পৃথক্ ধ্রুবক $m$ ও $n$ ব্যবহার করিবে। ]

✓ **উদা. 2.** If A is equal to the sum of two quantities one of which varies directly as B and the other inversely as B ; and if A = 7 when B = 1 and A = $10\frac{1}{3}$ when B = 3, find the relation between A and B and the value of A when B = 2.

এখানে A যে দুইটি রাশির সমষ্টি তাহাদের একটি B-এর সহিত সরল ভেদে এবং অন্যটি ব্যস্ত ভেদে থাকায় প্রথমটি $= m$B এবং দ্বিতীয়টি $= \frac{n}{\text{B}}$ হইবে ($m$ ও $n$ দুইটি ধ্রুবক )।

অতএব, $A = mB + \frac{n}{B}$.

$\because$ $B = 1$ হইলে $A = 7$ হয়, $\therefore$ $7 = m.1 + \frac{n}{1} = m + n \cdots (1)$

আবার, $\because$ $B = 3$ হইলে $A = 10\frac{1}{3}$ হয়, $\therefore$ $10\frac{1}{3} = m.3 + \frac{n}{3}$,

বা, $31 = 9m + n \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই, $m = 3$ এবং $n = 4$.

অতএব, A ও B এর মধ্যে নির্ণেয় সম্বন্ধ হইল $A = 3B + \frac{4}{B}$.

এই সমীকরণে B এর মান 2 বসাইয়া পাই $A = 6 + \frac{4}{2} = 8$.

**লেখ।** $x$ যদি $y$ এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে $x = \frac{k}{y}$ ( $k$ ধ্রুবক )।

$x = \frac{k}{y}$ এর লেখ মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে। বিপরীতক্রমে, বলা যায় যে, একটি চলরাশির মানগুলিকে এবং অন্য একটি চলরাশির অন্যোন্যকের অনুরূপ মানগুলিকে যথাক্রমে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে লেখটি যদি মূল বিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে ঐ রাশি দুইটি ব্যস্ত ভেদে আছে।

আবার দেখ, $x = \frac{k}{y}$ সমীকরণ হইতে পাই $xy = k$ ( ধ্রুবক ) এবং ইহার লেখ একটি **সম-পরাবৃত্ত** (rectangular hyperbola)। অতএব, ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত রাশিদ্বয়ের অনুরূপ মানগুলিকে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে বিন্দুগুলি একটি সম-পরাবৃত্তে অবস্থিত।

25. **যৌগিক ভেদ (Joint variation)।** কখন কখন দেখা যায় যে, একটি চলরাশির মান অন্য একাধিক স্বাধীনভাবে পরিবর্তনশীল চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে। যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণ-ফলের সহিত সরল ভেদে থাকে, তবে বলা হয় যে প্রথম চলরাশিটি অপর চলরাশিগুলির সহিত **যৌগিক ভেদে** অবস্থিত। যথা, যদি দেওয়া থাকে যে

$A \propto BC$, তবে বলা হইবে যে B ও C-এর সহিত Aর যৌগিক ভেদ আছে এখানে $A = k.BC$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )।

**দৃষ্টান্ত :** (1) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}b \times h$ ( এখানে $\frac{1}{2}$ একটি ধ্রুবক এবং $b$ ত্রিভুজের ভূমি এবং $h$ উচ্চতা )।

অতএব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

(2) কার্যের পরিমাণ ঐ কার্যে নিযুক্ত লোকসংখ্যা এবং তাহারা যতদিন কাজ করে সেই দিন সংখ্যার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

[ **দ্রষ্টব্য :** (1) যদি $a, b, c, d\cdots$প্রভৃতির সহিত $x$ যৌগিক ভেদে থাকে, তবে $x = k \times abcd\cdots$হইবে ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )। বিপরীতক্রমে যদি $x = k \times abcd\cdots\cdot$হয় ( $k$ ধ্রুবক হইলে ), তবে $a, b, c, d\cdots$এর সহিত $x$এর যৌগিক ভেদ আছে বলা হইবে।

(2) যদি একটি রাশি একটি দ্বিতীয় রাশির সহিত ও একটি তৃতীয় রাশির অন্যোন্যকের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে, তবে বুঝিতে হইবে যে, প্রথম রাশিটি দ্বিতীয় রাশির সহিত সরল ভেদে ও তৃতীয়টির সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। যথা, $x$ রাশিটি $y$-এর সহিত সরল ভেদে ও $z$-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত হইবে যদি $x \propto \frac{y}{z}$ অর্থাৎ যদি $x = m\frac{y}{z}$ ( $m$ একটি ধ্রুবক ) হয়। ]

**দৃষ্টান্ত :** ত্রিভুজের উচ্চতা উহার ক্ষেত্রফলের সহিত সরল ভেদে এবং ভূমির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

**উদাহরণ।** If A varies as B and C jointly, and if $A = 2$, when $B = \frac{3}{5}$, $C = \frac{10}{27}$; find C, when $A = 54$ and $B = 3$. [C.U. '20]

এখানে ∵ $A \propto BC$, ∴ $A = kBC$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )....(1)

সমীকরণ (1)-এ $A = 2$, $B = \frac{3}{5}$ ও $C = \frac{10}{27}$ বসাইয়া পাই

$2 = k \times \frac{3}{5} \times \frac{10}{27} = \frac{2}{9}k$, ∴ $k = 9$. অতএব $A = 9BC\cdots(2)$।

এক্ষণে, (2)-এ A = 54 ও B = 3 বসাইয়া পাই

$$54=9\times3\times C, \quad \therefore \quad C=\tfrac{54}{27}=2.$$

26. **যৌগিক ভেদের উপপাদ্য**—If $x$ varies as $y$ when $z$ is constant, and $x$ varies as $z$ when $y$ is constant, then will $x$ vary as the product of $yz$ when both $y$ and $z$ vary.

[ যখন $z$ ধ্রুবক তখন যদি $y$ এর সহিত $x$ সরলভেদে থাকে, এবং $y$ ধ্রুবক হইলে যদি $z$ এর সহিত $x$ সরলভেদে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $y$ ও $z$ দুইটিই চল হইলে $yz$ এর সহিত $x$ সরল ভেদে থাকিবে। ]

**প্রমাণঃ** এখানে দেখা যাইতেছে যে, $x$-এর ভেদ আংশিকভাবে $y$-এর উপর এবং আংশিকভাবে $z$-এর উপর নির্ভরশীল। এক্ষণে মনে কর, প্রত্যেকটি ভেদ পৃথক্‌ভাবে হইয়া $x$-এর উপর নিজ নিজ ফল উৎপন্ন করিতেছে। মনে কর, $x, y, z$ এর যথাক্রমে তিনটি অনুরূপ মান $a, b, c$ অর্থাৎ প্রথমে যে মান ছিল সম্পূর্ণ পরিবর্তনের পর $x$-এর মান $a$, $y$-এর মান $b$ এবং $z$-এর মান যেন $c$ হইল।

প্রথমে ধর, $z$ ধ্রুবক আছে এবং $y$-এর মান পরিবর্তিত হইয়া $b$ হইল। ইহার ফলে $x$-এর মান কেবল আংশিকভাবে বদলাইবে, কিন্তু একেবারে $a$ হইবে না। মনে কর, এই আংশিক মান $a'$ হইল ; সুতরাং $\frac{x}{a'}=\frac{y}{b}$ হইল$\cdots$(1).

আবার ধর, $y$-এর মান $b$ ধ্রুবক আছে এবং $z$-এর মান পরিবর্তিত হইয়া $c$ হইল। ইহার ফলে $x$-এর মান সম্পূর্ণ পরিবর্তিত হইয়া $a'$ হইতে $a$ হইবে। অতএব, $\frac{a'}{a}=\frac{z}{c}\cdots\cdots(2)$.

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে পাই

$$\frac{x}{a'}\times\frac{a'}{a}=\frac{y}{b}\times\frac{z}{c}, \text{ বা, } \frac{x}{a}=\frac{yz}{bc}, \text{ বা, } x=\frac{a}{bc}\times yz.$$

অতএব $x\propto yz$ ( প্রমাণিত হইল )।

**দ্রষ্টব্য ঃ** চলের সংখ্যা আরও বেশী হইলেও এই উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে। যদি A, B, C, D,……প্রভৃতি কতিপয় রাশি এরূপ হয় যে অপর একটি রাশি $x$ উহাদের প্রত্যেকটির সহিত সরল ভেদে থাকিবে যখন অন্যগুলি ধ্রুবক থাকে, তবে যখন উহাদের সবগুলিরই মান পরিবর্তিত হইবে তখন উহাদের সবগুলির গুণফলের সহিত $x$ সরল ভেদে থাকিবে।

**দৃষ্টান্ত ঃ** ত্রিভুজের উচ্চতা ধ্রুবক থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল উহার ভূমির সহিত সরল ভেদে থাকে এবং ভূমি ধ্রুবক থাকিলে ক্ষেত্রফল উচ্চতার সহিত সরল ভেদে থাকে। অতএব, উচ্চতা ও ভূমি উভয়ই পরিবর্তিত হইলে ক্ষেত্রফল উচ্চতা ও ভূমির সহিত যৌগিক ভেদে থাকে।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** যদি $A \propto B$ যখন C ধ্রুবক এবং $A \propto \frac{1}{C}$ যখন B ধ্রুবক, তবে $x \propto \frac{B}{C}$ যখন B ও C উভয়ই চল হয়।

**উদাহরণ।** Apply the principle of variation to find how long 15 men will take to plough 25 acres, if 6 men take 10 days to plough 20 acres.

মনে কর, লোকসংখ্যা $=n$, দিনসংখ্যা $=d$ এবং একর সংখ্যা $=A$. এখানে দেখা যাইতেছে যে, দিনসংখ্যা ধ্রুবক থাকিলে লোকসংখ্যা একর সংখ্যার সহিত সরল ভেদে থাকিবে এবং একর সংখ্যা ধ্রুবক থাকিলে দিনসংখ্যার সহিত $n$ ব্যস্ত ভেদে থাকিবে।

অতএব, $n \propto A$ যখন $d$ ধ্রুবক, এবং $n \propto \frac{1}{d}$ যখন A ধ্রুবক।

$\therefore \quad n \propto \frac{A}{d}$ যখন A ও $d$ উভয়ই চল।

$\therefore \quad n = k\frac{A}{d}$ ($k$ একটি ধ্রুবক )।

প্রদত্ত সর্ত হইতে $\because$ $d=10$ এবং $A=20$ হইলে $n=6$ হয়,

$\therefore \quad 6 = k\frac{20}{10}, \quad \therefore \quad k=3.$

এক্ষণে, $A=25$ এবং $n=15$ বসাইয়া পাই

$$15=k.\frac{A}{d}=3.\frac{25}{d}, \text{ বা } 15d=75, \quad \therefore \quad d=5.$$

অতএব, নির্ণেয় সময় $=5$ দিন।

## 27. ভেদ সম্বন্ধে কতিপয় বিশেষ সিদ্ধান্ত

1. যদি $A\propto B$, তাহা হইলে $B\propto A$.

**প্রমাণ :** $\because \ A\propto B, \ \therefore \ A=k.B$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )

$\therefore \ B=\frac{1}{k}.A, \ \therefore \ B\propto A$ ( কারণ, $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক )।

2. যদি $A\propto B$, তাহা হইলে $A^m\propto B^m$.

**প্রমাণ :** $\because \ A\propto B, \ \therefore \ A=k.B$ ( $k$ ধ্রুবক )

$\therefore \ (A)^m=(kB)^m$, বা, $A^m=k^mB^m$,

$\therefore \ A^m\propto B^m$ ( কারণ $k^m$ ধ্রুবক )।

3. যদি $A\propto B$ এবং $B\propto C$, তাহা হইলে $A\propto C$. [ C. U. '22 ]

**প্রমাণ :** $\because \ A\propto B, \ \therefore \ A=k.B$ ( $k$ একটি ধ্রুবক ),

এবং $\because \ B\propto C, \ \therefore \ B=m.C$ ( $m$ একটি ধ্রুবক ).

$\therefore \ A=kB=k\,mC=kmC$

$\therefore \ A\propto C$ ( কারণ $km$ এখানে ধ্রুবক )।

4. যদি $A\propto BC$, তাহা হইলে $B\propto \frac{A}{C}$ এবং $C\propto \frac{A}{B}$.

**প্রমাণ :** $\because \ A\propto BC, \ \therefore \ A=kBC$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )

অতএব, $B=\frac{1}{k}.\frac{A}{C}, \ \therefore \ B\propto \frac{A}{C}$ ( কারণ, এখানে $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক )।

অনুরূপে $C=\frac{1}{k}\frac{A}{B}, \ \therefore \ C\propto \frac{A}{B}$ ( কারণ $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক )।

5. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $AC \propto BC$ ( C যে-কোন ধ্রুবক বা চল রাশি হউক না কেন )।

প্রমাণঃ $\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = kB$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )।

$\therefore$ $AC = k.BC$, $\therefore$ $AC \propto BC$ ( কারণ, $k$ ধ্রুবক )।

6. যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$, তাহা হইলে $(A \pm B) \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

প্রমাণঃ $\because$ $A \propto C$, $\therefore$ $A = m.C$ ( $m$ একটি ধ্রুবক )$\cdots$(1)

এবং $\because$ $B \propto C$, $\therefore$ $B = n.C$ ( $n$ একটি ধ্রুবক )$\cdots$(2)

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিয়া পাই

$$A \pm B = (m \pm n)C,$$

$\therefore$ $(A \pm B) \propto C$ ( কারণ $m$ ও $n$ ধ্রুবক বলিয়া $m+n$ বা $m-n$ ধ্রুবক )।

আবার, $AB = mC \times nC = mn.C^2$

$\therefore$ $AB \propto C^2$ ( কারণ $mn$ একটি ধ্রুবক )।

7. যদি $A \propto B$ এবং $C \propto D$, তাহা হইলে $AC \propto BD$, এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

[ C. U. '23 ]

প্রমাণঃ $\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = mB$ ( $m$ একটি ধ্রুবক )$\cdots$(1)

এবং $\because$ $C \propto D$, $\therefore$ $C = nD$ ( $n$ একটি ধ্রুবক )$\cdots$(2)

$\therefore$ $(1) \times (2)$ করিয়া পাই $AC = mnBD$,

$\therefore$ $AC \propto BD$ ( কারণ, এখানে $mn$ একটি ধ্রুবক )।

আবার $(1) \div (2)$ করিয়া পাই $\frac{A}{C} = \frac{m}{n} . \frac{B}{D}$,

$\therefore$ $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$ (কারণ, $\frac{m}{n}$ একটি ধ্রুবক )।

## উদাহরণমালা 11

উদা. 1. If A varies as B and also as C, show that A varies as B − C. [ C. U. '25 ]

$\because$ A $\propto$ B, $\therefore$ A $= k$B ( $k$ একটি ধ্রুবক ), $\therefore$ B $= \frac{A}{k}\cdots(1)$

আবার, $\because$ A $\propto$ C, $\therefore$ A $= m$C ($m$ একটি ধ্রুবক), $\therefore$ C $= \frac{A}{m}\cdots(2)$.

এক্ষণে, (1) − (2) করিয়া পাই

$$B - C = \frac{A}{k} - \frac{A}{m} = A\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) = A\left(\frac{m-k}{km}\right),$$

$$\therefore\ A = \frac{km}{m-k}(B - C).$$

অতএব, A $\propto$ B − C ( কারণ, এখানে $\frac{km}{m-k}$ একটি ধ্রুবক )।

উদা. 2. If $\frac{a}{b} \propto a+b$ and $\frac{b}{a} \propto a-b$, shew that $a^2-b^2$ is invariable.

$\because\ \frac{a}{b} \propto a+b,\ \therefore\ \frac{a}{b} = k(a+b)$ এখানে $k$ একটি ধ্রুবক ;

আবার, $\because\ \frac{b}{a} \propto a-b,\ \therefore\ \frac{b}{a} = m(a-b)$ এখানে $m$ একটি ধ্রুবক ;

অতএব, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = km(a+b)(a-b)$.

বা, $1 = km(a^2-b^2)$, $\therefore\ a^2-b^2 = \frac{1}{km} =$ ধ্রুবক।

উদা. 3. Complete the following :—

(i) If $x \propto a^2$, then $a \propto \cdots\cdots$

(ii) If $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, then $a \propto \cdots\cdots$

(i) $\because \ x \propto a^2, \ \therefore \ x = ka^2$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )

$$\therefore \ a^2 = \frac{x}{k}, \ \therefore \ a = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}.$$

$\because \ \sqrt{k}$ একটি ধ্রুবক, $\therefore \ a \propto \sqrt{x}$

$\therefore$ If $x \propto a^2$, then $a \propto \sqrt{x}$

(ii) $\because \ x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}, \ \therefore \ x = k.\frac{1}{\sqrt{a}}$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক ),

বা, $x^2 = \frac{k^2}{a}, \ \therefore \ a = \frac{k^2}{x^2} = k \ .\frac{1}{x^2}.$

$\because \ k^2$ একটি ধ্রুবক, $\therefore \ a \propto \frac{1}{x^2}.$

$\therefore$ If $x \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$, then $a \propto \frac{1}{x^2}$.

উদা. 4. If $A \propto B^2$ and if $B = 4$ when $A = 4$, find $B$ when $A = 3$ and also find $A$ when $B = 9$. Find also $B$ in terms of $A$.

$\because \ A \propto B^2, \ \therefore \ A = kB^2$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )

প্রদত্ত সর্ত হইতে A ও B-এর মান বসাইয়া পাই $4 = k.(4)^2$,

$\therefore \ k = \frac{1}{4}. \ \therefore \ A = \frac{1}{4}B^2.$

এক্ষণে, $A = 3$ হইলে, $3 = \frac{1}{4}B^2$, বা $B^2 = 12$, $\therefore \ B = \pm 2\sqrt{3}$.

আবার, $B = 9$ বসাইয়া পাই $A = \frac{1}{4} \times 9^2 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$.

আবার, $\because \ kB^2 = A, \ \therefore \ \frac{1}{4}B^2 = A$, বা $B^2 = 4A$,

$\therefore \ B = \pm \sqrt{4A} = \pm 2\sqrt{A}.$

উদা. 5. If $A^2 + B^2$ varies as $A^2 - B^2$, shew that $A$ varies as $B$. [ C. U. '23 ]

$\because \ A^2 + B^2 \propto A^2 - B^2$

$\therefore \ A^2 + B^2 = k(A^2 - B^2)$ [এখানে $k$ একটি ধ্রুবক ],

$\therefore \ \frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2} = \frac{k}{1}.$ এক্ষণে যোগ-বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{A^2+B^2+A^2-B^2}{A^2+B^2-A^2+B^2}=\frac{k+1}{k-1}, \text{ বা, } \frac{2A^2}{2B^2}=\frac{k+1}{k-1},$$

বা, $\frac{A^2}{B^2}=\frac{k+1}{k-1}$, বা, $A^2=\frac{k+1}{k-1}B^2$,

বা, $A=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.B$, $\therefore$ $A \propto B$ $\left(\because \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \text{ ধ্রুবক}\right)$

উদা. 6. Given that $x+y$ varies as $z+\frac{1}{z}$ and that $x-y$ varies as $z-\frac{1}{z}$; find the relation between $x$ and $z$ provided that $z=2$ when $x=3$ and $y=1$. [ P. U. '48 ]

$\because$ $x+y \propto z+\frac{1}{z}$,

$\therefore$ $x+y=k\left(z+\frac{1}{z}\right)$, এখানে $k$ একটি ধ্রুবক$\cdots$(1)

আবার, $\because$ $(x-y)\propto\left(z-\frac{1}{z}\right)$,

$\therefore$ $x-y=m\left(z-\frac{1}{z}\right)$, এখানে $m$ একটি ধ্রুবক$\cdots$(2).

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2x=k\left(z+\frac{1}{z}\right)+m\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdots$(3).

এক্ষণে, $\because$ $x=3$ এবং $y=1$ হইলে $z=2$ হয়,

$\therefore$ (1) হইতে পাই $3+1=k(2+\frac{1}{2})$, বা $\frac{5}{2}k=4$, $\therefore$ $k=\frac{8}{5}$.

আবার (2) হইতে পাই $3-1=m(2-\frac{1}{2})$, বা $\frac{3}{2}m=2$, $\therefore$ $m=\frac{4}{3}$.

অতএব, (3) হইতে পাই $2x=\frac{8}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{z}\right)$,

বা, $2x=(\frac{8}{5}+\frac{4}{3})z+(\frac{8}{5}-\frac{4}{3})\frac{1}{z}=\frac{44}{15}z+\frac{4}{15z}$, বা, $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$,

বা, $15x=22z+\frac{2}{z}$, ইহাই নির্ণেয় $x$ ও $z$-এর সম্বন্ধ।

উদা. 7 If $a \propto b^2$ and $1+b \propto \sqrt{c}$, find $a$ in terms of $c$ if $c=9$ and $b=5$ when $a=1$.

$\because \ a \propto b^2$. $\therefore \ a=mb^2$ ( এখানে $m$ একটি ধ্রুবক ) ...(1)

আবার, $\because \ 1+b \propto \sqrt{c}$, $\therefore \ 1+b=n\sqrt{c}$ (এখানে $n$ একটি ধ্রুবক)...(2).

(1) হইতে $a$ ও $b$ এর মান বসাইয়া পাই $1=m(5)^2$, $\therefore \ m=\frac{1}{25}$.

(2) হইতে $b$ ও $c$ এর মান বসাইয়া পাই $1+5=n\sqrt{9}=3n$, $\therefore \ n=2$.

এক্ষণে (2) হইতে পাই $1+b=2\sqrt{c}$ ( $\because \ n=2$ ),

বা, $b=2\sqrt{c}-1$, $\therefore \ b^2=4c-4\sqrt{c}+1$,

অতএব, (1) হইতে $a=mb^2$, বা, $a=\dfrac{b^2}{25}$ ( $\because \ m=\frac{1}{25}$ )

$$\therefore \quad a=\frac{4c-4\sqrt{c}+1}{25}.$$

উদা. 8. If $x$ varies directly as the square of $y$ and inversely as the cube root of $z$, and if $x=2$, when $y=4$, $z=8$ ; find the value of $y$, when $x=3$ and $z=27$. [ C. U. '17 ]

$\because \ x \propto y^2$ এবং $x \propto \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}$,

$\therefore \ x \propto y^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}$, $\therefore \ x=k\dfrac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )।

এক্ষণে, $x=2$, $y=4$ ও $z=8$ বসাইয়া পাই

$$2=k.\frac{4^2}{\sqrt[3]{8}}=k\frac{16}{2}=8k, \quad \therefore \ k=\tfrac{1}{4}.$$

$\therefore \ x=\frac{1}{4}.\dfrac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$. ইহাতে $x=3$ ও $z=27$ বসাইয়া পাই

$$3=\frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{\sqrt[3]{27}}=\frac{y^2}{4.3} \text{ বা, } y^2=36, \quad \therefore \ y=\pm 6.$$

**উদা. 9.** If $b \propto a^3$, find the ratio in which $b$ is increased if $a$ is increased in the ratio 3 : 2.

$a$-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে $a^3$-এর মান $(\frac{3}{2})^3$ বা $\frac{27}{8}$ বা 27 : 8 অনুপাতে বাড়ে।

এক্ষণে $\because$ $b \propto a^3$, $\therefore$ $a$-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে $b$-এর মান 27 : 8 অনুপাতে বাড়িবে।

**উদা. 10.** If $x$ varies inversely as $y$, show that $x+y$ is least when $x=y$.

$\because$ $x \propto \frac{1}{y}$, $\therefore$ $x=k.\frac{1}{y}$, বা $xy=k$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )।

এক্ষণে, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4k$

এখানে $4k$ ধ্রুবক বলিয়া ইহার মান অপরিবর্তিত থাকিবে, এবং $(x-y)^2$ ধনাত্মক বলিয়া ইহার মান শূন্য হইলে $(x+y)^2$ এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

অতএব, যদি $(x-y)^2=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $x=y$ হয়, তবে $x+y$ এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

**উদা. 11.** If $x+y \propto x-y$, show that (i) $x^2+y^2 \propto xy$, (ii) $ax+by \propto px+qy$, $a$, $b$, $p$, $q$ being all constants.

[ C. U. '36, P. U. '47]

(i) $\because$ $x+y \propto x-y$, $\therefore$ $x+y=k(x-y)$, এখানে $k$ একটি ধ্রুবক,

$\therefore$ $(x+y)^2=k^2(x-y)^2$ [ বর্গ করিয়া ],

বা, $x^2+y^2+2xy=k^2(x^2+y^2)-2k^2xy$,

বা, $2xy+2k^2xy=k^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$ [ পক্ষান্তর করিয়া ]

বা, $2(k^2+1)xy=(k^2-1)(x^2+y^2)$

$\therefore$ $x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}.xy.$

অতএব, $x^2+y^2 \propto xy$ ( কারণ, এখানে $k$ ধ্রুবক )।

(ii) $\because x+y \propto x-y$, $\therefore x+y=k(x-y)$, এখানে $k$ একটি ধ্রুবক,

$\therefore \dfrac{x+y}{x-y}=k$, $\therefore$ সংযোগ-বিভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{k+1}{k-1}=m$ ( মনে কর ), $\therefore x=my$,

এক্ষণে, $\dfrac{ax+by}{px+qy}=\dfrac{amy+by}{pmy+qy}=\dfrac{y(am+b)}{y(pm+q)}=\dfrac{am+b}{pm+q}$;

$\because$ $a, b, p, q$ ধ্রুবক এবং $k$ ধ্রুবক হওয়ায় $m$ ধ্রুবক,

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, $ax+by \propto px+qy$.

✓ উদা. 12. If $x+y \propto z$ when $y$ is constant and if $z+x \propto y$ when $z$ is constant, show that when both $y$ and $z$ vary, then $x+y+z \propto yz$. [ G. U. '49 ]

$\because$ $x+y \propto z$ ($y$ অপরিবর্তিত থাকিলে )

$\therefore$ $x+y=kz$ ( $k$ একটি ধ্রুবক )

$\therefore$ $x+y+z=kz+z=(k+1)z$ ; অতএব $y$ অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto z$ ( কারণ $k+1$ ধ্রুবক )।

আবার, $\because$ $x+z \propto y$ ( যখন $z$ অপরিবর্তিত থাকে )

$\therefore$ $x+z=my$ ( এখানে $m$ যে কোন একটি ধ্রুবক )

$\therefore$ $x+z+y=my+y=(m+1)y$.

অতএব, $z$ অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto y$ ( কারণ, এখানে $m+1$ ধ্রুবক )।

$\therefore$ যৌগিক ভেদ উপপাদ্য হইতে প্রমাণিত হইল যে $y$ ও $z$ উভয়ই চল হইলে $x+y+z \propto yz$.

উদা. 13. If $x, y, z$ be variable quantities such that $y+z-x$ is constant and $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$, prove that $x+y+z \propto yz$. [ P. U. '40 ]

মনে কর, $y+z-x=k$ ( ধ্রুবক )।

$\because$ $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$

$\therefore \quad (x+y-z)(x+z-y)=myz$ ( এখানে $m$ একটি ধ্রুবক ),

বা, $x^2-(y-z)^2=myz,$

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz=myz-4yz,$

বা, $x^2-(y+z)^2=(m-4)yz,$

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(m-4)yz,$

বা, $(x+y+z)\times(-k)=(m-4)yz \;[\because\; y+z-x=k],$

$\therefore \quad x+y+z=\frac{m-4}{-k}.\,yz=\frac{4-m}{k}.\,yz\,;$

অতএব, $x+y+z \propto yz$ ( কারণ, $\frac{4-m}{k}$ ধ্রুবক )।

উদা. 14. Two globes of gold that have their radii equal to $r$ and $r'$ are melted and formed into a single globe ; find its radius ( the volume of a globe varies as the cube of the radius ). [ C. U. '31]

মনে কর, গোলক দুইটির আয়তন ( volume ) যথাক্রমে V ও $v$ এবং উহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে $r$ ও $r'$.

$\because \; V \propto r^3, \quad \therefore \; V=mr^3$ ( এখানে $m$ ধ্রুবক ).

আবার, $\because \; v \propto r'^3, \quad \therefore \; v=mr'^3$ ( এখানে $m$ ধ্রুবক ).

$\therefore \; V+v=m(r^3+r'^3).$

এখানে, তৃতীয় গোলকটির আয়তন $V+v$ এবং মনে কর উহার ব্যাসার্ধ R.

$\therefore \; V+v=mR^3$ ( $m$ ধ্রুবক ).

অতএব, $mR^3=m(r^3+r'^3)$

$\therefore \; R=\sqrt[3]{r^3+r'^3}.$

উদা. 15. The time of oscillation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 8 feet oscillates once in 3·1 seconds, find the time for a pendulum 10 ft. long.

মনে কর, $t$ সেকেণ্ড একবার দোলনের সময় এবং $l$ ফুট দোলকের দৈর্ঘ্য। অতএব, প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $t \propto \sqrt{l}$,

$\therefore \quad t = k\sqrt{l}$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )

$\because \quad l = 8$ ফু. হইলে $t = 3{\cdot}1$ সেকেণ্ড হয়,

$\therefore \quad 3{\cdot}1 = k\sqrt{8} = k.2\sqrt{2}, \qquad \therefore \quad k = \dfrac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}}.$

অতএব, $t = \dfrac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}}\sqrt{l}$ হইল, এই সমীকরণে $l = 10$ বসাইলে পাই

$$t = \frac{3{\cdot}1}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{10} = \frac{3{\cdot}1 \times \sqrt{20}}{4} = \frac{3{\cdot}1 \times 2\sqrt{5}}{4} = 3{\cdot}5 \text{ ( প্রায় )।}$$

অতএব, নির্ণেয় সময় $= 3{\cdot}5$ সেকেণ্ড ( প্রায় )।

উদা. 16. The mass $m$ of a body varies as density $d$ when the volume $v$ is constant and varies as the volume $v$ when density $d$ is constant. If unit mass be defined as mass of a body of unit volume and unit density, show that $m = vd$. [C.U. '29]

$\because \quad v$ ধ্রুবক থাকিলে $m \propto d$

এবং $d$ ধ্রুবক থাকিলে $m \propto v$,

$\therefore \quad m \propto vd, \quad \therefore \quad m = kvd$ ( এখানে $k$ একটি ধ্রুবক )…(1)

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $v = 1$ ও $d = 1$ হইলে $m = 1$ হয়,

$\therefore \quad (1)$ হইতে $1 = k \times 1 \times 1 = k.$

অতএব, (1) হইতে পাই $m = kvd = vd \quad [\because \quad k = 1].$

উদা. 17. A playground, whose length and width are in the ratio 8 : 7, has two-thirds of it reserved for accommodation. If the width is to be diminished by one-ninth, in what ratio should the length be increased in order that the accommodation may be trebled? [C. U. '32]

মনে কর, মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে $x$ ও $y$, সুতরাং মাঠের ক্ষেত্রফল $xy$. অতএব, $\frac{2}{3}xy$ অংশ বসিবার স্থান এবং $\frac{1}{3}xy$ অংশ খেলিবার স্থান।

প্রশ্নানুসারে খেলিবার অংশ অপরিবর্তিত থাকিবে এবং বসিবার স্থান 3 গুণ করিতে হইবে। $\therefore$ নূতন মাঠের মোট ক্ষেত্রফল $=3\times\frac{2}{3}xy+\frac{1}{3}xy=\frac{7}{3}xy.$
এক্ষণে, নূতন মাঠের প্রস্থ পূর্ব প্রস্থের $\frac{1}{9}$ কমিয়া যাওয়ায় নূতন প্রস্থ হইল $\frac{8}{9}y$

$\therefore$ নূতন মাঠের দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{3}xy\div\frac{8}{9}y=\frac{21}{8}x.$

অতএব, দৈর্ঘ্যটি 8 : 21 অনুপাতে বর্ধিত করিতে হইবে।

### Exercise 9

1. If $b\propto a^3$ and if $b=50$ when $a=5$, find $b$ when $a=1$ and find $a$ when $b=6\frac{1}{4}$. Find also $b$ in terms of $a$.

2. If $y\propto\dfrac{1}{x^2}$ and if $y=9$ when $x=10$, find $y$ if $x=6$ and find $x$ if $y=4$. Find also $y$ in terms of $x$.

3. If A varies as B and C jointly and if $A=2$ when $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{10}{27}$, find C when $A=54$ and $B=3$. [C. U. '20]

4. If $a^2+b^2\propto ab$, show that $a+b\propto a-b$.

5. The resistance (R) to the motion of a train of given weight is partly constant and partly varies as the square of the velocity ($v$). Express the statement by symbols.

6. Complete the following :—

   (i) If $a\propto b^3$, $b\propto$

   (ii) If $t\propto\sqrt{l}$, $l\propto$.

7. If $a\propto b$ and $b\propto c$, show that $a^3+b^3+c^3\propto 3abc$.

8. If $x$ varies directly as $y$ and inversely as $z$, and $x=\frac{1}{6}$ when $y=5$ and $z=9$, find the relation between $x$, $y$ and $z$. Hence find the value of $x$ when $y=6$ and $z=\frac{1}{5}$.

9. Is $x-y\propto z$ when $y$ is constant and $x-z\propto y$ when $z$ is constant, show that $x-y-z\propto yz$ when $y$ and $z$ both vary.

10. If $b$ is equal to the sum of two quantities one of which varies directly as $a$, and the other inversely as $a$,

and if $b=5$ when $a=1$ and $b=12\cdot5$ when $a=6$, find the relation between $a$ and $b$. Find the value of $b$ when $a=3$.

**11.** A varies as the sum of two other quantities, one of which varies directly as $B^2$ and the other inversely as C. If $A=16$ when $B=2$ and $C=1$, and if $A=5$ when $B=1$ and $C=2$, find the value of A when $B^2=3$ and $C^2=16$.

**12.** If $x \propto \frac{1}{y^2}$, find the ratio in which $x$ is increased if $y$ is increased in the ratio $7:4$.

**13.** The area of a circle varies as the square of its radius ; if the area is $17\frac{1}{9}$ sq. ft. when the radius is 2 ft. 4 in., find the area when the radius is 3 ft. 6 in.

**14.** If $x$ varies directly as the square of $y$ and inversely as the cube root of $z$, and if $x=2$ when $y=4$ and $z=8$, find the value of $y$ when $x=3$ and $z=27$. [ C. U. '37 ]

**15.** Apply the principle of variation to find how long 25 men will take to plough 30 acres, if 5 men take 9 days to plough 10 acres of land. [ C. U. '34]

**16.** The length of a pendulum varies inversely as the square of the number of beats it makes per minute. If a pendulum 16 ft. long makes 27 beats per minute, find the length of the pendulum that makes 24 beats per minute.

**17.** If $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$ and $z \propto \frac{b}{a}$, find how $x$ varies with $a$, $b$.

**18.** If in the variation $x=ky$ and $y=k'z$, $a, b, c$ and $a', b', c'$ be two sets of values of $x, y, z$,

show that $\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}$. [C. U. '22]

**19.** If a stone falls $s$ ft. in $t$ seconds from rest, $s \propto t^2$. If it is observed to fall 64 ft. in 2 secs., find how far it falls in 4 seconds.

**20.** The pressure of wind on a plane surface varies jointly as the area of the surface and the square of the wind's velocity. If the pressure on a square foot is 1 lb. when the wind's velocity is 16 miles per hour; find the velocity of the wind when the pressure on a square yard is $14\frac{1}{16}$ lb.

**21.** Pressure $(=p)$ in a liquid varies as depth $(=d)$ when the density $(=D)$ is constant and it varies as density when depth is constant. The pressure is 1 when the depth is 32 and the density 1. Find the depth at which the pressure is 2 when the density is 16. [ C. U. '21 ]

**22.** The electrical resistance of a wire is proportional directly to its length and inversely to the square of its diameter. Compare the resistance of two wires of the same material, one of which has a diameter of 1·5 *mm*. and is 4*m*. long, while the other has a diameter of 2*mm*. and is 5*m*. long.

**23.** The volume of a sphere varies as the cube of the radius and the surface of a sphere varies as the square of the radius. Show that the square of the volume varies as the cube of the surface. [ C. U. 1924 ]

**24.** The cost of a dinner is partly constant and partly varies as the number of guests. If the cost is Rs. 275 for 150 guests and Rs. 320 for 240 guests; find the cost for 250 guests,

**25.** The cost of boring a well, $f$ feet deep, partly varies as $f$ and partly as $f^2$. Such a well costs Rs. 130 if the depth is 40 ft. and costs Rs. 255 if the depth is 60 ft. How deep is the well if the cost is Rs. 420 ?

**26.** In a certain machine a force of P pounds will support a load of W pounds and it is known that P is partly constant and partly proportional to W. If P=14 when W=44 and P=26 when W=92, draw a graph to show the value of P for any load between 40 lbs. and 100 lbs. Find the value (*i*) of P when W=76, and (*ii*) of W when P=20.

## Logarithm ( লগারিদ্‌ম্ )

28. আমরা জানি $2^3=8$, এখানে 2-কে বলা হয় নিধান ( base ) এবং 3-কে বলা হয় 2-এর ঘাতের ( power ) সূচক (index)। তাহা হইলে 3-এর সহিত 8-এর কি সম্পর্ক ? আমরা বলিব 3, 8-এর লগারিদ্‌ম্ যখন নিধান 2 ; ইহা ইংরাজীতে বলা হয় 3 is the logarithm of 8 to the base 2. ইহা সংক্ষেপে লিখা হয় এই ভাবে $3=\log_2 8$. সেইরূপে, যেহেতু $3^2=9$, $\therefore\ 2=\log_3 9$. সাধারণতঃ যদি $a^x=M$ হয়, তবে $x=\log_a M$ হয়।

বিপরীতক্রমে যদি $x=\log_a M$ হয়, তবে $a^x=M$ হয়।

সংজ্ঞা ঃ কোন নিধানকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদ্‌ম্ বলে।

29. কতিপয় সূত্র ঃ

(a) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(b) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

(c) $\log_a M^n = =n \log_a M$

(d) $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$.

### সূত্রগুলির প্রমাণ ঃ

(a) মনে করা যাক, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_a N$

$\therefore\ a^x=M\cdots\cdots(1)$
এবং $a^y=N\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^x.a^y=MN$, বা $a^{x+y}=MN$.

$\therefore\ \log_a(MN)=x+y=\log_a M+\log_a N$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\log_a(xyz\cdots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots$

(*b*) মনে করা যাক, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_a N$,

$\therefore\ a^x=M$ এবং $a^y=N$.

এখন ভাগ করিয়া $\dfrac{a^x}{a^y}=\dfrac{M}{N}$, বা, $a^{x-y}=\dfrac{M}{N}$

$\therefore\ \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$

(*c*) $\log_a M^n=\log_a$ (M. M. M.......$n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$=\log_a M+\log_a M+\log_a M+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=n\log_a M.$

(*b*) মনে কর যে, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_b M$.

$\therefore\ a^x=M$ এবং $b=M$, $\therefore\ a^x=b^y$ বা $a^{\frac{x}{y}}=b$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\log_a b,\qquad \therefore\ x=y\log_a b,$

$\therefore\ \log_a M=\log_b M\times\log_a b.$

[ **দ্রষ্টব্য :** এই সূত্র দ্বারা নিধান পরিবর্তন করা হইয়াছে । ]

**অনুসিদ্ধান্ত :** এই সূত্রে $M=a$ ধরিলে $\log_b a\times\log_a b=1.$

**30. লগারিদম্-এর তত্ত্বাবলী :—**

(i) আমরা জানি $a^0=1$, $\therefore\ \log_a 1=0.$

$\therefore$ ( 0 ভিন্ন ) যে কোন নিধানের পক্ষে একের লগারিদম্ শূন্য হইবে ।

(ii) $a^1=a$, $\therefore\ \log_a a=1.$

$\therefore$ যাহা নিধান তাহারই লগারিদম্ সর্বদা 1 হইবে ।

(iii) নিধান যদি 1 অপেক্ষা কম হয়, তবে 0-এর লগারিদম্ হইবে $\infty$, এবং যদি নিধান 1 অপেক্ষা বেশী হয় তবে 0-এর লগারিদম্ হইবে $-\infty$.

$a<1$ ধরিয়া যদি $a^x=0$ হয়, তবে $x=+\infty$.

$\therefore\ \log_a 0=+\infty.$

আবার, $a>1$ ধরিয়া যদি $a^x=0$ হয়, তবে $x=-\infty$,

$\therefore\ \log_a 0=-\infty.$

**31. সাধারণ লগারিদম্ ( Common logarithm )**

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদম্‌কে সাধারণ লগারিদম্ বলে।

কোন লগারিদমে নিধানটি লেখা না থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, নিধান 10 আছে। অর্থাৎ log 285 বলিলে $\log_{10} 285$ বুঝিতে হইবে।

**32. পূর্ণক এবং অংশক ( Characteristic and Mantissa ).**

$10^0=1 \qquad \therefore \log 1=0$

$10^1=10 \qquad \therefore \log 10=1$

$10^2=100 \qquad \therefore \log 100=2$

$10^3=1000 \qquad \therefore \log 1000=3$

$10^4=10{,}000 \qquad \therefore \log 10{,}000=4.$

এখন দেখা যাইতেছে যে 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদম্ 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট অর্থাৎ 1+দশমিকাংশ।

তদ্রূপ, 101 হইতে 999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদম্ 2 হইতে বড় এবং 3 হইতে ছোট অর্থাৎ 2+দশমিকাংশ।

তাহা হইলে বুঝা যাইতেছে, কোন রাশির লগারিদম্ যে পূর্ণ সংখ্যা হইবেই তাহার কোন স্থিরতা নাই। ইহার কিছু পূর্ণ অংশ ও কিছু দশমিকাংশ থাকিতে পারে। এই পূর্ণ অংশের নাম পূর্ণক ( Characteristic ) এবং দশমিকাংশের নাম অংশক ( Mantissa )।

আরও দেখা যাইতেছে যে, 2 হইতে 9 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 0; 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 1; 101 হইতে 999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 2, 1001 হইতে 9999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদমের পূর্ণক 3, অর্থাৎ কোন রাশির পূর্ণ অংশে অঙ্ক সংখ্যা যত তাহা হইতে 1 কম হইবে উহার লগারিদমের পূর্ণক।

**33.** আবার $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1 \qquad \therefore \log \cdot1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01 \qquad \therefore \log \cdot01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot001 \qquad \therefore \log \cdot001=-3$

মনে কর যে, log ·03 নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন যেহেতু $\cdot01 < \cdot03 < \cdot1$, $\therefore$ $\log \cdot01 < \log \cdot03 < \log \cdot1$

অর্থাৎ log ·03, −2 অপেক্ষা বড় এবং −1 অপেক্ষা ছোট হইবে,

$\therefore$ log ·03 = −2 + দশমিকাংশ,

ইহার পূর্ণক ঋণাত্মক অর্থাৎ −2 এবং অংশক ধনাত্মক।

এখানে দেখ, দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী পূর্ণক হইবে এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. (i) log·234 = −1 + একটি দশমিক ভগ্নাংশ, এখানে পূর্ণক −1

(ii) log·0234 = −2 + " " " , এখানে পূর্ণক −2

(iii) log·00234 = −3 + " " " , এখানে পূর্ণক −3

[ দ্রষ্টব্য : অংশক সর্বক্ষেত্রেই ধনাত্মক হইবে। ]

### 34. পূর্ণক বাহির করিবার নিয়ম

(i) যদি রাশিটি 1 হইতে বড় হয়, তবে

রাশির পূর্ণ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে উহার লগারিদমের পূর্ণক।

(ii) যদি রাশিটি 1 হইতে ছোট হয়, তবে

দশমিক বিন্দু হইতে প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে, তাহা অপেক্ষা 1 বেশী হইবে লগারিদমের পূর্ণক এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

### 35. অংশক (Mantissa) বাহির করিবার নিয়ম

পুস্তকের শেষে লগ তালিকাটি ( log table-টি ) দেখ। উহাতে দশমিক 4 অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে।

ঐ তালিকায় প্রথম স্তম্ভে নীচে নীচে মোটা অক্ষরে লিখা আছে 10 হইতে 99 পর্যন্ত। তালিকার মাথার উপরে মাঝারি অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত এবং তারও পরে ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত লিখা আছে। এই মাথার

সারির নীচে এবং বামের মোটা সংখ্যার ডান দিকের সারিতে প্রতি ঘরে যে সব সংখ্যা আছে তাহা মোটেই পূর্ণ সংখ্যা নহে। প্রতিটি সংখ্যার আগে দশমিক বিন্দু আছে ধরিয়া লইতে হইবে। অর্থাৎ যদি লেখা থাকে 0043, তবে বুঝিবে উহা ·0043. ইত্যাদি।

এখন লগ তালিকা হইতে কি প্রকারে কোন সংখ্যার অংশক বাহির করা যায় তাহা বোঝান যাইতেছে।

(i) মনে করা যাক 37এর লগের অংশক বাহির করিতে হইবে :—

প্রথম স্তম্ভের 37এর পরই মাথার উপরে 0-এর স্তম্ভের নীচে আছে 5682 অতএব, 37 এর অংশক হইবে ·5682.

(ii) 374এর লগের অংশক দেখিতে হইলে 37এর পর সোজা ডান দিকের সারিতে আঙ্গুল লইয়া গিয়া থামিতে হইবে সেই ঘরে যে ঘরের মাথার উপরে আছে 4. ঐ ঘরে সংখ্যা লিখা আছে 5729 ; সুতরাং 374এর লগের অংশক হইবে ·5729

(iii) 3746 অর্থাৎ 4 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগের অংশক।

প্রথমে তিনটি অঙ্ক 374এর লগের উপরোক্ত নিয়মে অংশক ·5729. সংখ্যাটির চতুর্থ অঙ্ক 6, সেইজন্য 37এর পর সোজা ডান দিকের শেষে যে ছোট হরফে 1 হইতে 9 পর্যন্ত আছে তাহার 6-এর নীচে লিখা আছে 7 অর্থাৎ ·0007. এখন ·0007 এবং ·5729 যোগ করিলে পাওয়া যায় ·5736. ইহাই 3746এর লগের অংশক।

**দ্রষ্টব্য :** 3746এর লগের পূর্ণক 3 এবং অংশক ·5736.

$\therefore \quad \log 3746 = 3{\cdot}5736.$

তদ্রূপ $\log 37 = 1{\cdot}5682$ এবং $\log 374 = 2{\cdot}5729.$

. যে সব সংখ্যার অঙ্কগুলি সমান এবং একই ভাবে সাজান আছে শুধু দশমিক বিন্দুর স্থান পৃথক, তাহাদের সকলেরই লগের অংশক সমান।

আমরা বাহির করিয়াছি $\log 3746 = 3{\cdot}5736.$

এখন $\log 374{\cdot}6=\log \frac{3746}{10}$

$=\log 3746-\log 10=3{\cdot}5736-1=2{\cdot}5736$

$\log 37{\cdot}46=\log \frac{3746}{100}$

$=\log 3746-\log 100=3{\cdot}5736-2=1{\cdot}5736$

$\log 3{\cdot}746=\log \frac{3746}{1000}$

$=\log 3746-\log 1000=3{\cdot}5736-3={\cdot}5736$

$\log {\cdot}3746=\frac{3746}{10000}$

$=\log 3746-\log 10000=3{\cdot}5736-4$

$={\cdot}5736-1=\bar{1}{\cdot}5736.$

**দ্রষ্টব্য :** $\log {\cdot}3746$এর পূর্ণক $-1$ এবং অংশক ${\cdot}5736$.

ইহাকে $-1{\cdot}5736$ লিখিলে বোঝা যায় যে $1{\cdot}5736$ সমস্তটাই ঋণাত্মক। কিন্তু অংশক ঋণাত্মক নয়, শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক। শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক ইহা বুঝাইবার জন্য 1 এর মাথার উপর একটি রেখা টানিয়া দিয়া পরে দশমিক বিন্দু এবং অংশক লেখা হয়। এই রেখাকে বলা হয় Bar অর্থাৎ $\bar{1}$ হইল bar 1, $\bar{2}$ হইল bar 2 ইত্যাদি এবং ইহাতে ঐ 1 ও 2 ঋণাত্মক বুঝায়।

## 37. Antilogarithm or Antilog.

কোন সংখ্যা $m$-এর যদি লগারিদম্ $n$ হয়, তবে $m$-কে $n$-এর য়্যান্টি-লগারিদম্ বা য়্যান্টিলগ বলে। যথা,

$\log 37{\cdot}46=1{\cdot}5736$, $\therefore$ $1{\cdot}5736$এর য়্যান্টিলগারিদম্ হইবে $37{\cdot}46$.

38. Antilogarithm বাহির করিবার নিয়ম।

Antilog table-এর প্রথম সারিতে দশমিক বিন্দুর পরে দুইটি অঙ্ক দেওয়া আছে। ইহা লগারিদমের অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক।

(i) মনে কর, $1{\cdot}5736$-এর Antilogarithm বাহির করিতে হইবে। ইহার অংশক ${\cdot}5736$, কাজেই ${\cdot}57$-এর ডান দিকে এবং যে ঘরের মাথার উপরে

3 আছে সেই ঘরে সংখ্যা আছে 3741, এই রেখার আরও ডানদিকে 6-এর নীচে আছে 5 ; এই 5, 3741 এর সহিত যোগ করিলে পাওয়া যায় 3746.

$\therefore$ ·5736 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল 3746 ; যেহেতু 1·5736এর পূর্ণক 1, $\therefore$ ইহা যে সংখ্যার লগারিদম্ তাহার পূর্ণ সংখ্যায় দুইটি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ 1·5736-এর Antilogarithm 37·46 হইল।

তদ্রূপ 2·5736-এর Antilogarithm 374·6

এবং $\bar{2}$·5736-এর Antilogarithm ·03746.

(ii) $-$·5378এর য়্যান্টিলগ কত ?

যেহেতু $-·5378=-1+1-·5378$

$=-1+·4622=\bar{1}·4622.$

$\therefore$ $-$·5378এর য়্যান্টিলগ $=\bar{1}$·4622 এর য়্যান্টিলগ = ·2898.

## উদাহরণমালা 12

**উদা. 1.** Find the logarithm of (*a*) 78, (*b*) 324, (*c*) 1·362 and (*d*) ·035.

(*a*) 78 সংখ্যাটি দুই অঙ্কের বলিয়া উহার লগের পূর্ণক হইবে 1. এক্ষণে, লগ তালিকা হইতে লগ 78-এর অংশক নির্ণয়ের জন্য লগ 78=লগ 780 ধরিবে। ঐ তালিকায় 78-এর পর মাথায় 0-র স্তম্ভের নীচে 8921 সংখ্যাটি আছে, সুতরাং অংশকটি হইল ·8921.

$\therefore$ log 78=1·8921.

(*b*) 324এর অঙ্ক সংখ্যা তিন, সুতরাং উহার লগের পূর্ণক হইবে 2. এক্ষণে লগ তালিকায় 32এর ডান দিকে মাথায় 4এর স্তম্ভের নীচে সংখ্যা লেখা আছে 5105.

$\therefore$ log 324=2·5105.

(*c*) 1·362এর পূর্ণ সংখ্যায় একটি অঙ্ক থাকায় উহার লগের পূর্ণক হইবে 0. লগ তালিকায় 13এর ডানদিকে মাথার প্রথম 6এর স্তম্ভের নীচে 1335 সংখ্যাটি পাইলাম, ঐ লাইনে আরও ডানদিকে 2এর স্তম্ভের নীচে আছে 7 ; 1335+7=1342.

$\therefore\ \log 1{\cdot}362 = {\cdot}1342.$

(*d*) ·035 সংখ্যাটিতে প্রথমেই দশমিকের পর একটি শূন্য থাকায় উহার লগের পূর্ণকটি ঋণাত্মক 2 অর্থাৎ $\bar{2}$ হইবে। এক্ষণে লগ তালিকা হইতে দেখা যায় log 35=·5441.

$\therefore\ \log {\cdot}035 = \bar{2}{\cdot}5441.$

**উদা. 2.** Using table find the antilog of (*a*) $\bar{1}{\cdot}2463$ and (*b*) $-2{\cdot}8254$.

(*a*) $\bar{1}{\cdot}2463$এর অংশক ·2463 ; য়্যান্টিলগ তালিকায় ·24এর ডানদিকে এবং মাথার উপরে যে ঘরে 6 আছে তার নীচে সংখ্যা আছে 1762, এই রেখায় আরও ডানদিকে 3এর স্তম্ভের নীচে আছে 1 ; 1762 এর সহিত ঐ 1 যোগ করিয়া হইল 1763.

$\therefore$ ·2463 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল ·1763 ;

$\because$ $\bar{1}{\cdot}2463$ এর পূর্ণক $\bar{1}$,

$\therefore$ ইহা যে সংখ্যার লগ তাহাতে পূর্ণ সংখ্যা নাই এবং তাহার দশমিকের পর প্রথম অঙ্কটি সার্থক অঙ্ক।

$\therefore$ $\bar{1}{\cdot}2463$ এর নির্ণেয় য়্যান্টিলগ = ·1763.

(*b*) $-2{\cdot}8254 = -3+1-{\cdot}8254 = -3+{\cdot}1746 = \bar{3}{\cdot}1746.$

য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে দেখা যায় ·1746এর য়্যান্টিলগ = ·1495 ;

এখানে পূর্ণক $\bar{3}$টি ঋণাত্মক, সুতরাং নির্ণেয় Antilogএ দশমিকের পর দুইটি শূন্য দিয়া সংখ্যাটি আরম্ভ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় Antilog = ·001495.

উদা. 3. Using log tables find the value of $\frac{1}{(1\cdot045)^{20}}$.

[ P. U. '50 ]

মনে কর, $x=\frac{1}{(1\cdot045)^{20}}$.

$\therefore \quad \log x=\log \frac{1}{(1\cdot045)^{20}}=\log 1-\log (1\cdot045)^{20}$

$=\log 1-20 \log 1\cdot045=0-20\times\cdot0191=-\cdot382$

$=-1+1-\cdot382=-1+\cdot618=\log \cdot4150$

( য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে )

$\therefore \quad x=\cdot415$. অতএব, নির্ণেয় মান $=\cdot415$.

উদা. 4. Using log tables find the value of $\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$.

[ P. U. 1948 ]

মনে কর, $x=\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}, \quad \therefore \quad \log x=\log \frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$

$=\log (2\cdot415)^{\frac{1}{5}}-\log (\cdot824)^4$

$=\frac{1}{5} \log 2\cdot415-4 \log \cdot824$

$=\frac{1}{5}\times 0\cdot3829-4\times\bar{1}\cdot9159$

$=\cdot0765+4-3\cdot6636=\cdot4129$

$=\log 2\cdot587$ ( Antilog তালিকা হইতে )

$\therefore \quad x=2\cdot587, \quad \therefore$ নির্ণেয় মান $=2\cdot587$.

উদা. 5. If $\log x=2\cdot5785$, find $x$.

এখানে প্রদত্ত লগের পূর্ণকটি 2, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যার অখণ্ডাংশ 3 অঙ্কের হইবে।

এক্ষণে, পূর্ণক 2 ছাড়িয়া দিয়া প্রদত্ত অংশক ·5785 এর Antilog নির্ণয় করিতে হইবে।

তালিকা হইতে Antilog $\cdot5785 = 3\cdot788$

$\therefore \quad 2\cdot5785 = \log 378\cdot8.$

$\therefore \quad x = 378\cdot8.$

উদা. 6. Find the value of $(1\cdot035)^{-16}$ from the log table.

মনে কর $x = (1\cdot035)^{-16}$

$\therefore \quad \log x = \log (1\cdot035)^{-16} = -16 \log 1\cdot035 = -16 \times \cdot0149$

$= -\cdot2384 = -1 + 1 - \cdot2384$

$= -1 + \cdot7616 = \bar{1}\cdot7616$

$= \log \cdot5776$ (Antilog তালিকা হইতে)

$\therefore \quad x = \cdot5776, \quad \therefore$ নির্ণেয় মান $= \cdot5776.$

উদা. 7. Find the number of digits in $(6)^{25}$, having given $\log 2 = \cdot3010$ and $\log 3 = \cdot4771$.

$\log (6)^{25} = 25 \log 6 = 25 \log (2 \times 3) = 25 (\log 2 + \log 3)$

$= 25(\cdot3010 + \cdot4771) = 25 \times \cdot7781 = 19\cdot4525.$

$\because \quad \log (6)^{25}$এর পূর্ণক 19 পাওয়া গিয়াছে,

$\therefore \quad (6)^{25}$এ মোট 20টি অঙ্ক সংখ্যা আছে।

উদা. 8. Find the position of the first significant figure in the value of $2^{-30}$ ; given that $\log 2 = \cdot3010$.

মনে কর, $x = 2^{-30}$

$\therefore \quad \log x = \log 2^{-30} = -30 \times \log 2 = -30 \times \cdot3010$

$= -9\cdot03 = -10 + 1 - \cdot03 = \overline{10}\cdot97$

$\because$ লগ $x$এর পূর্ণক $\overline{10}$,

$\therefore$ প্রথমেই দশমিকের পর শূন্য সংখ্যা $= 10 - 1 = 9.$

$\therefore$ প্রথম সার্থক অঙ্ক হইবে দশম অঙ্ক।

উদা. 9. Find from the log table the value of

$$\frac{3{\cdot}78 \times {\cdot}032 \times 109{\cdot}2 \times 19{\cdot}895}{{\cdot}00078 \times 981}.$$

| লগ তালিকার সাহায্যে লবগুলির লগ | হরগুলির লগ |
|---|---|
| লগ $3{\cdot}78 = {\cdot}5775$ | লগ ${\cdot}00078 = \bar{4}{\cdot}8921$ |
| লগ ${\cdot}032 = \bar{2}{\cdot}5051$ | লগ $981 = 2{\cdot}9917$ |
| লগ $109{\cdot}2 = 2{\cdot}0382$ | $\bar{1}{\cdot}8838$ |
| লগ $19{\cdot}895 = 1{\cdot}2987$ | |
| $2{\cdot}4195$ | |

এক্ষণে $2{\cdot}4195 - (\bar{1}{\cdot}8838) = 2{\cdot}4195 + 1 - {\cdot}8838 = 2{\cdot}5357$

$\because$ Antilog $2{\cdot}5357 = 343{\cdot}4$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 343{\cdot}4$.

উদা. 10. Find the square root of ·0265.

$\sqrt{{\cdot}0265} = ({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}$. এক্ষণে $\log ({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log {\cdot}0265$

$= \frac{1}{2} \times \bar{2}{\cdot}4232 = \bar{1}{\cdot}2116 = \log {\cdot}1628$

$\therefore$ $({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}} = {\cdot}1628$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= {\cdot}1628$.

উদা. 11. If $\log 2 = {\cdot}30103$, find $\log 5$.

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - {\cdot}30103 = {\cdot}69897$.

উদা. 12. If $\log 2 = {\cdot}3010300$ and $\log 13 = 1{\cdot}1139434$, find $\log 65$.

$\log 65 = \log (5 \times 13) = \log 5 + \log 13 = \log \frac{10}{2} + \log 13$

$= \log 10 - \log 2 + \log 13 = 1 - {\cdot}3010300 + 1{\cdot}1139434$

$= 1{\cdot}8129134$.

উদা. 13. Find the value of $\sqrt[5]{35{\cdot}28}$, given that $\log 2 = {\cdot}3010$, $\log 3 = {\cdot}4771$, $\log 7 = {\cdot}8451$ and $\log 203{\cdot}9 = 2{\cdot}3095$.

$35{\cdot}28=\frac{3528}{100}=\frac{2^3\times3^2\times7^2}{10^2}$ ; মনে কর, $x=\sqrt[5]{35{\cdot}28}$.

$\therefore\ \log x=\log\ (35{\cdot}28)^{\frac{1}{5}}=\log\left(\frac{2^3\times3^2\times7^2}{10^2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{5}\ [\ 3\log 2+2\log 3+2\log 7-2\log 10\ ]$

$=\frac{1}{5}\ [3\times{\cdot}3010+2\times{\cdot}4771+2\times{\cdot}8451-2\times1\ ]$

$=\frac{1}{5}\ [\ {\cdot}9030+{\cdot}9542+1{\cdot}6902-2\ ]$

$=\frac{1}{5}\times1{\cdot}5474={\cdot}3095$ [ 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত ]

এখন $\because\ \log 203{\cdot}9=2{\cdot}3095,$

$\therefore\ \log 2{\cdot}039={\cdot}3095. \quad \therefore\ x=2{\cdot}039.$

$\therefore\ \sqrt[5]{35{\cdot}28}=2{\cdot}039.$

**উদা. 14.** Find the value of 1·231 of £ 2. 14s. 7d. to the nearest penny.

প্রদত্ত রাশি = 655 পে. × 1·231 = $x$ ( মনে কর )

$\therefore\ \log x=\log 655+\log 1{\cdot}231$

$=2{\cdot}8162+{\cdot}0902$ ( লগ তালিকা হইতে )

$=2{\cdot}9064=\log 806{\cdot}1$ (Antilog তালিকা হইতে )

$\therefore\ x=806{\cdot}1$ ; $\therefore$ নির্ণেয় মান = 806·1 পে. = 3 পা. 7 শি. 2পে. (প্রায়).

**উদা. 15.** Find ( to the nearest rupee ) the amount at compound interest on Rs. 2150 for 3 years at 5%.

সমূল চক্রবৃদ্ধি = আসল × $\left(1+\frac{\text{হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর}}$

$=2150\times(1+\frac{5}{100})^3=2150\times(1{\cdot}05)^3.$

এক্ষণে $\log\{2150\times(1{\cdot}05)^3\}=\log 2150+3\log 1{\cdot}05$

$=3{\cdot}3324+3\times{\cdot}0212=3{\cdot}3960=\log 2489$

$\therefore$ নির্ণেয় সমূল চক্রবৃদ্ধি = 2489 টাকা।

উদা. 16. In a right-angled triangle, the sides containing the right angle are 27·4 in. and 32·5 inches. Find its area.

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 27·4 \times 32·5$ ব. ই. $= 13·7 \times 32·5$ ব. ই.

এক্ষণে $\log (13·7 \times 32·5) = \log 13·7 + \log 32·5$

$= 1·1367 + 1·5119 = 2·6486 = \log 445·2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 445·2$ বর্গ ইঞ্চি।

উদা. 17. The population of a town is 3000. If it increases annually at the rate of 10%, what will be the population at the end of 3 yrs. ?

নির্ণেয় লোকসংখ্যা $= 3000 \times (1 + \frac{10}{100})^3 = 3000 \times (1·1)^3$.

এক্ষণে $\log \{3000 \times (1·1)^3\} = \log 3000 + 3 \log 1·1$

$= 3·4771 + 3 \times ·0414 = 3·6013 = \log 3993$.

$\therefore$ নির্ণেয় লোকসংখ্যা $= 3993$.

উদা. 18. Prove that $\log \frac{65}{14} + \log \frac{77}{143} = \log 5 - \log 2$.

$\log \frac{65}{14} = \log 65 - \log 14 = \log (5 \times 13) - \log (2 \times 7)$

$= \log 5 + \log 13 - \log 2 - \log 7$,

এবং $\log \frac{77}{143} = \log 77 - \log 143 = \log 7 + \log 11 - \log 11 - \log 13$.

$\therefore \log \frac{65}{14} + \log \frac{77}{143} = \log 5 + \log 13 - \log 2 - \log 7$

$+ \log 7 + \log 11 - \log 11 - \log 13$

$= \log 5 - \log 2$.

উদা. 19. Shew that $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$.

[C. U. '51]

প্রদত্ত বামপক্ষ $= \log 75 - \log 16 - 2 (\log 5 - \log 9)$

$+ \log 32 - \log 243$

$= \log(3 \times 5^2) - \log 2^4 - 2(\log 5 - \log 3^2) + \log (2^5) - \log 3^5$

$=\log 3+2\log 5-4\log 2-2(\log 5-2\log 3)+5\log 2$
$-5\log 3=\log 3+2\log 5-4\log 2-2\log 5+4\log 3$
$+5\log 2-5\log 3=5\log 3-5\log 3+\log 2=\log 2.$

উদা. 20. Prove that $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1$. [C.U. '34]

মনে কর, $\log_b a=x$, $\log_c b=y$ এবং $\log_a c=z$ ;

$\therefore\ a=b^x,\ b=c^y$, এবং $c=a^z$,

$\therefore\ a=b^x=(c^y)^x=c^{yx}=(a^z)^{yx}=(a)^{xyz},\quad\therefore\ xyz=1,$

সুতরাং $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1$.

উদা. 21. If $\dfrac{\log x}{y-z}=\dfrac{\log y}{z-x}=\dfrac{\log z}{x-y}$, prove that $x^xy^yz^z=1$.

এখানে $\dfrac{\log x}{y-z}=\dfrac{\log y}{z-x}=\dfrac{\log z}{x-y}=k$ ( মনে কর )

$\therefore\ \log x=k(y-z),\quad\therefore\ x\log x=k.x(y-z)$ ;

অনুরূপে $\log y=k(z-x),\quad\therefore\ y\log y=k.y(z-x)$,

এবং $\log z=k(x-y),\quad\therefore\ z\log z=k.z(x-y)$.

$\therefore\ \log x^xy^yz^z=x\log x+y\log y+z\log z$
$=k\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}=k\times 0=0=\log 1,$
$\therefore\ x^xy^yz^z=1.$

উদা. 22. Prove that $x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1$.
[C. U. '39]

মনে কর, বামপক্ষ $=u$ ;

এখন উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাই

$\log u=(\log y-\log z)\log x+(\log z-\log x)\log y$
$+(\log x-\log y)\log z=0=\log 1.$

$\therefore\ u=1$ ; অতএব প্রদত্ত বামপক্ষ $=1$.

উদা. 23. Solve by the help of log tables $2^x=3^y$ and $2^{y+1}=3^{x-1}$. [ C. U. '42 ]

সমীকরণ দুইটি হইতে লগ লইয়া পাই $x \log 2=y \log 3 \cdots\cdots(1)$.

এবং $(x-1) \log 3=(y+1) \log 2 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) এর গুণফলকে $\log 2 \times \log 3$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$x(x-1)=y(y+1)$, বা $x^2-y^2=x+y$, বা $x-y=1$, বা $x=y+1$.

$\therefore$ (2) হইতে পাই $(x-1) \log 3=x \log 2$,

বা, $x \log 3-\log 3=x \log 2$, বা, $x(\log 3-\log 2)=\log 3$.

$\therefore \quad x=\dfrac{\log 3}{\log 3-\log 2}=\dfrac{\cdot 4771}{\cdot 4771-\cdot 3010}=\dfrac{\cdot 4771}{\cdot 1761}=2\cdot 7$ ( প্রায় ) ;

আবার, $y=x-1=2\cdot 7-1=1\cdot 7$ ( প্রায় )।

উদা. 24. If $x, y, z$ are in G. P., show that

$\log_a x, \log_a y, \log_a z$ are in A. P.

$\because \quad x, y, z$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী, $\quad \therefore \quad y^2=xz$.

এক্ষণে উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাই

$\log y^2=\log xz$, বা $2 \log y=\log x+\log z$,

$\therefore \quad \log_a x, \log_a y, \log_a z$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 25. If 1 cm. $=\cdot 3937$ inches, express 1 Km. in miles.

1 কি. মি. $=100,000$ সে. মি. $=\cdot 3937 \times 100000$ ই.

$=39370$ই. $=\dfrac{3937}{12 \times 3 \times 176}$ মাইল।

মনে কর, $x=\dfrac{3937}{12 \times 3 \times 176}$

$\therefore \quad \log x=\log \dfrac{3937}{36 \times 176}=\log 3937-\log 36-\log 176$

$=3\cdot 5952-1\cdot 5563-2\cdot 2455$

$= -\cdot 2066 = -1 + 1 - \cdot 2066 = \bar{1}\cdot 7034$

$= \log \cdot 6215$ ( য়্যাণ্টিলগ তালিকা হইতে )

$\therefore \ x = \cdot 6215, \quad \therefore$ 1 কিলোমিটার $= \cdot 6215$ মাইল।

উদা. 26. Find the logarithm of 144 at the base $2\sqrt{3}$.

মনে কর, নির্ণেয় লগারিদম্ $= x$,

সুতরাং $(2\sqrt{3})^x = 144 = 16 \times 9 = 2^4(3)^2 = 2^4.(\sqrt{3})^4 = (2\sqrt{3})^4$,

$\therefore \ x = 4, \quad \therefore$ নির্ণেয় লগারিদম্ $= 4$.

উদা. 27. If $\log (x^3y^2) = 3a + 2b$ and $\log (x^2y^3) = 2a + 3b$, find $\log x$ and $\log y$ in terms of $a$ and $b$. [ C. U. '48 ]

$\because \ \log x^3y^2 = 3a + 2b,$

$\therefore \ 3 \log x + 2 \log y = 3a + 2b \cdots\cdots (1)$

আবার, $\because \ \log x^2y^3 = 2a + 3b,$

$\therefore \ 2 \log x + 3 \log y = 2a + 3b \cdots\cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই,

$\log x = a$ এবং $\log y = b$.

## 39. Slide Rule

সিলেবাসে নির্দেশ দেওয়া হইয়াছে যে, 'Use of Slide Rule may be encouraged.' অতএব, শিক্ষক মহাশয়গণ এই Slide Rule-এর প্রয়োগবিধি এবং উহার সাহায্যে কিরূপে বিবিধ অঙ্কের সমাধান করা যায় তাহা ছাত্রগণকে শিক্ষা দিবেন—ইহাই উদ্দেশ্য। এই Ruleটি Engineering ও নানাবিধ বৈজ্ঞানিক গবেষণায় কোন নির্ণেয় রাশি বাহির করিতে ব্যবহার করা হয়। এই Slide Ruleটি কি তাহা বলা হইতেছে, কিন্তু ইহা শিক্ষার্থীদিগকে দেখাইয়া ইহার প্রয়োগবিধি শিখাইতে হইবে।

ছাত্রেরা যে Foot Rule ব্যবহার করিয়া থাকে, Slide Rule তাহা হইতে স্বতন্ত্র এক প্রকার মাপক। ইহার দৈর্ঘ্য সাধারণতঃ Foot Rule-এর মত 1 ফুট হইয়া থাকে। ইহা ফুটরুল অপেক্ষা কিছু বেশী পুরু ও চওড়া।

Slide Ruleএর উপরদিকে একটি এবং উহার দুইপাশে নীচের দিকে দুইটি অংশ আছে। উপরের অংশে দৈর্ঘ্য বরাবর কয়েকটি সারিতে বিভিন্ন সংখ্যা লেখা আছে। ঐ সংখ্যা সারিগুলির সাহায্যে গুণফল, ভাগফল, বর্গমূল, ঘনমূল, বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $e^x$, Antilog এবং বিভিন্ন ঘাতের মান (সাধারণতঃ 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ) পাওয়া যায়। আর, দৈর্ঘ্য বরাবর দুই দিকের ধার দুইটিতে সম্মুখ ভাগের সংখ্যাগুলি হইতে যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (sin, cos, tan প্রভৃতি) নির্ণয় করা যায়। অপর ধারের সংখ্যাগুলি হইতে যে কোন সংখ্যার লগারিদম্ পাওয়া যায়।

এই Slide Ruleএর আবার দুইটি অংশ আছে—একটি অংশ স্থির, অপরটি সচল অর্থাৎ উহাকে ডান দিকে বা বাম দিকে ইচ্ছামত সরাইয়া যে কোন সংখ্যার কাছে আনা যায়, এইজন্য নাম Slide Rule হইয়াছে। এতদ্ভিন্ন ইহার আর একটি স্বচ্ছ অংশ আছে, উহাকে cursar বলে। উহা ডানদিকে বা বামদিকে আবশ্যক মত সরাইয়া নির্ণেয় রাশি বা উত্তর স্থির করা হয়।

অতএব, এই Slide Rule-এর বিশেষত্ব বা গণিত বিদ্যায় ইহার প্রয়োজনীয়তা সহজেই বুঝা যায়।

## Exercise 10

1. Find the logarithms of 88, ·1234 and ·003256.

2. Find the antilogs of 1·362, −1·2463 and $\bar{2}$·8254.

3. If log 2 = ·30103 and log 3 = ·47712, find the number of digits in $2^{17}$ and $3^{20}$.

4. Find the position of the first significant digit in the value of $3^{-13}$ given that log 3 = ·47712.

5. Find the square root of 2·7 and the 5th root of 8·216 and the square of $\frac{7}{8}$.

6. Find from the log table the value of :—

(i) $\sqrt[3]{45{\cdot}37} \times ({\cdot}7692)^4$. [ P. U. '49 ]

(ii) $\dfrac{32{\cdot}47 \times 4{\cdot}8 \times 873{\cdot}2}{523{\cdot}4 \times {\cdot}04236 \times 391}$ (iii) $\dfrac{42{\cdot}36 \times 3{\cdot}802 \times {\cdot}524}{578{\cdot}3 \times 8{\cdot}129}$

7. Given $\log 2 = {\cdot}3010300$ and $\log 3 = {\cdot}4771213$, find the value of log 45. [ C. U. '51 ]

8. If $\log 2 = {\cdot}30103$, find the value of $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$.

9. Find the value of £ 13. 6*s*. 8*d*. × 5·25.

10. Find the price of 196 articles at Rs. 4. 5*a*. 2p. each.

11. Find the mean proportional between 55 and 1375.

12. Find in acres the area of a rectangular field 2253 yds. by 269 yds.

13. Find (in nearest rupees) the amount from Rs. 425 in 3 yrs. at 4% compound interest.

14. If the present population of a town be 6000 and if it increases annually at the rate of 5%, what will be the population in 2 years ?

15. Find the radius of the circle whose area is $\frac{11}{35}$ acres.

16. Find log 324 when the base is $3\sqrt{2}$.

17. Prove that $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$. [ C. U. '36 ]

18. Show that $\log_{10} 2 + 16 \log_{10} \frac{16}{15} + 12 \log_{10} \frac{25}{24} + 7 \log_{10} \frac{81}{80} = 1$. [ C. U. '40 ]

19. If 1 metre = 39·37 inches, express 1 sq. metre in sq. yds.

20. If $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$, shew that $xyz = 1$.

21. If three numbers be in G. P., show that their logarithms are in A. P.

22. Solve : (i) $2^x.3^{2x}=100$. [C. U. '25]

(ii) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+1}+2^{2x+6}$

by the help of log tables. [C. U. '41]

23. Find the logarithm of 1728 to the base $2\sqrt{3}$.

24. Show that $\log\frac{b^n}{c^n}+\log\frac{c^n}{a^n}+\log\frac{a^n}{b^n}=0$. [C. U. '44]

25. If $a, b, c, d$ be any 4 positive numbers, prove that $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$. [C. U. '42]

26. If $\log(x^2y^3)=a$ and $\log\left(\frac{x}{y}\right)=b$, find $\log x$ and $\log y$ in terms of $a$ and $b$. [C. U. '19]

27. If $\log_a b=10$ and $\log_{6a}(32b)=5$, find $a$. [C. U. '49]

28. If $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$, show that $x\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log a$.

[C. U. '37]

Solve the following equations by the help of log-tables when required :—

29. $6^{3-4x}4^{x+5}=8$. [C. U. '45]

30. $2^x.7^y=80000$, $3^y=500$. [C. U. '47]

31. $5^{5-3x}+4^{\frac{1}{2}x+3}=5^{7-3x}-2^{x+5}$ ( correct to 3 places of decimals ). [C. U. '43]

## Irrational Quantities ( অমূলদ রাশি )

40. পূর্বে করণী (surd) বা অমূলদ রাশি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। তোমরা জান, যে-সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না, তাহাকে করণী বা অমূলদ সংখ্যা বলে।

যে-রাশিতে এক বা একাধিক করণী থাকে তাহাকে অমূলদ রাশি বলে।

এইসব বিষয় পূর্ব-শ্রেণীতে তোমরা শিখিয়াছ। এখানে দ্বিঘাত করণীর কতিপয় উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

### 41. দ্বিঘাত করণী সম্বন্ধে কতিপয় উপপাদ্য

I (*a*) দুইটি এক জাতীয় দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হইবে।

**প্রমাণঃ** মনে কর, $a\sqrt{x}$ ও $b\sqrt{x}$ দুইটি একজাতীয় করণী। উহাদের গুণফল হইল $(a\sqrt{x}\times b\sqrt{x})$ বা $abx$ এবং ইহা মূলদ। উহাদের ভাগফল হইল $\frac{a}{b}$, ইহাও মূলদ।

(*b*) বিপরীতক্রমে, যদি দুইটি করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হয়, তবে করণী দুইটি এক জাতীয় হইবে।

**প্রমাণঃ** মনে কর, দুইটি করণী $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$ এর গুণফল একটি মূলদ রাশি $p$.

অতএব, $\sqrt{x}\times\sqrt{y}=p, \quad \therefore \quad \sqrt{x}=\frac{p}{\sqrt{y}}=\frac{p}{y}.\sqrt{y}$

$=$একটি মূলদ রাশি $\left(\frac{p}{y}\right)\times\sqrt{y}$. অতএব, $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$ এক জাতীয় করণী।

ভাগফল সম্বন্ধেও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

**অনুসিদ্ধান্তঃ** দুইটি ভিন্ন জাতীয় দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল অমূলদ হইবে।

II. একটি দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

**প্রমাণ ঃ** যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $a=b^2+c\pm2b\sqrt{c}$,

$\therefore\ \sqrt{c}=\pm\dfrac{a-b^2-c}{2b}$, ইহা একটি মূলদ রাশি।

এখন দেখা যাইতেছে একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সহিত সমান হইতেছে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

III. যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং যদি $x$ ও $a$ মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ অমূলদ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

**প্রমাণ ঃ** যদি $x$, $a$এর সহিত সমান না হয়, তবে মনে কর $x=a+m$.

এক্ষণে $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}=a+m+\sqrt{y}$,

$\therefore\ \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$, অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টির সমান হইতেছে, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore\ x=a$, এবং ইহা হইতে $\sqrt{y}=\sqrt{b}$ অর্থাৎ $y=b$ হইল।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

[ দ্রষ্টব্য ঃ উপপাদ্য III হইতে জানা গেল যে, $x\pm\sqrt{y}=a\pm\sqrt{b}$ এই আকারের সমীকরণে উভয়পক্ষের মূলদরাশি দুইটি সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশি দুইটিও সমান ধরা যাইবে। অর্থাৎ সমীকরণটি দুইটি পৃথক্ সমীকরণে $x=a$ এবং $y=b$ বিভক্ত করা যায়। এক্ষেত্রে অবশ্য $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ প্রকৃতপক্ষে অমূলদ হওয়া আবশ্যক। ]

**IV.** যদি $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হয়,

তবে $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণঃ $\because \sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$ ( উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া ),

$\therefore x=a+b$ এবং $\sqrt{y}=2\sqrt{ab}$

$\therefore x-\sqrt{y}=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\therefore \sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হইবে।

**V.** যদি $\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণঃ $\because \sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$,

$\therefore x+\sqrt{y}=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$

[ উভয় পক্ষের ত্রিঘাত লইয়া ]

$=(a^3+3ab)+(3a^2+b)\sqrt{b}.$

অতএব, $x=a^3+3ab\cdots(1)$
এবং $\sqrt{y}=(3a^2+b)\sqrt{b}\cdots(2)$ } উভয়পক্ষের মূলদ অংশদ্বয় এবং অমূলদ অংশদ্বয় সমান বলিয়া।

এক্ষণে, (1) – (2) করিয়া পাই,

$x-\sqrt{y}=a^3-3a^2\sqrt{b}+3ab-b\sqrt{b}=(a-\sqrt{b})^3$

$\therefore \sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}.$

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি $^3(x-\sqrt{y})=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে

$\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হইবে।

## 42. করণীর বর্গমূল-নির্ণয়

আমরা জানি যে, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এর বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টি হইবে, অর্থাৎ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এর বর্গকে $x+\sqrt{y}$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়। অতএব, $x+\sqrt{y}$ এই আকারের রাশির বর্গমূল $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ আকারের হইবে।

(1) **$x+\sqrt{y}$ এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :**

মনে কর, $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$,

$\therefore \quad a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{ab}=\sqrt{y}$ বা $4ab=y\cdots\cdots(2)$

$\therefore \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-y$

$\therefore \quad a-b=\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3).$

এক্ষণে, $\because \quad a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $\quad a-b=\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3),$

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $a=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})$

এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $b=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})\}}+\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})\}}]$$

[ **দ্রষ্টব্য :** অনুরূপে $x-\sqrt{y}$ এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ এইরূপ ধরিবে। ]

(2) **$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এর বর্গমূল নির্ণয়**

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$,

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$.

অতএব, এখানে $a=x+y+z$, $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$, $\sqrt{c}=2\sqrt{yz}$

এবং $\sqrt{d}=2\sqrt{zx}$.

এক্ষণে, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}=2\sqrt{xy}\times2\sqrt{yz}$, $\therefore\ \sqrt{bc}=4y\sqrt{xz}$,

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{d}}=2y\ \ (\because\ \sqrt{d}=2\sqrt{xz})\ \ \therefore\ y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}$.

অনুরূপে পাওয়া যায় $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$ এবং $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\left\{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}\right)}\right\}.$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ** উপরের বর্গমূল সম্ভব হইবে যদি $x, y, z$ এর যে মানগুলি পাওয়া গিয়াছে তাহাদের সমষ্টি $a$-র সমান হয় অর্থাৎ যদি $a=x+y+z$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a=\dfrac{\sqrt{bd}}{2\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{d}}+\dfrac{\sqrt{cd}}{2\sqrt{b}}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$ হয়।

এই সর্ত পূরণ না হইলে উপরের $a=x+y+z$ সর্ত পূরণ হয় না, সুতরাং তখন রাশিটির বর্গমূল নির্ণয় সম্ভব হইবে না।

## উদাহরণমালা 13

**উদা.** 1. Find the square root of $4+2\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore$ বর্গ করিয়া পাই $4+2\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore\ x+y=4\ldots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$, অর্থাৎ $xy=3\ldots(2)$.

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(4)^2-4\times3=4$,

$\therefore\ x-y=\pm2\ldots(3)$.

এক্ষণে $\because$ $x+y=4$ এবং $x-y=\pm 2$, $\therefore$ $x=3$ এবং $y=1$,
অথবা, $x=1, y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{1})=\pm(\sqrt{3}+1)$.

[ দ্রষ্টব্য : প্রথমে রাশিটিকে $a+2\sqrt{b}$ এই আকারে পরিণত করিয়া এমন দুইটি রাশি নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি $a$ এবং গুণফল $b$এর সমান হয়। ঐ রাশি দুইটির বর্গমূলের সমষ্টিই নির্ণেয় বর্গমূল। উপরের উদাহরণে $3\times 1=3$ এবং $3+1=4$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{3}+1$. ]

উদা. 2. Find the square root of $7-4\sqrt{3}$.

এখানে $7-4\sqrt{3}=7-2\sqrt{4\times 3}=4+3-2\sqrt{4\times 3}=(2-\sqrt{3})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2-\sqrt{3})$.

উদা. 3. Find the square root of $\sqrt{48}+\sqrt{45}$.

এখানে $\sqrt{48}+\sqrt{45}=\sqrt{3}(\sqrt{16}+\sqrt{15})=\sqrt{3}(4+\sqrt{15})$

$$=\sqrt{3}\times\frac{8+2\sqrt{15}}{2}$$ [ $\sqrt{15}$ এর সহগ 2 করিবার জন্য ]

$$=\sqrt{3}\times\frac{5+3+2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}$.

উদা. 4. Find the square root of $9x+8y+12\sqrt{2xy}$.

$9x+8y+12\sqrt{2xy}=9x+8y+2\sqrt{72xy}=(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})^2$,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})=\pm(3\sqrt{x}+2\sqrt{2y})$.

উদা. 5. Find the square root of $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}.$$

ইহা সিদ্ধ হইবে যদি $x+y+z=9$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$ হয়।

এক্ষণে, $\because 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, $\therefore xy=6$, $\because 2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$,

$\therefore xz=8$, এবং $\because 2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$, $\therefore yz=12$.

$\therefore xyz=24$, $\therefore x=2, y=3, z=4$ এবং এই মানগুলির দ্বারা $x+y+z=9$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$.

**উদা. 6.** Find the square root of $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$.

মনে কর, $\sqrt{17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$

$$=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}.$$

ইহা সম্ভব হইবে যদি $x+y+z=17$, $-2\sqrt{xy}=-6\sqrt{2}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{6}$ এবং $-2\sqrt{yz}=-8\sqrt{3}$ হয়।

অতএব, $xy=18$, $xz=24$, $yz=48$, $\therefore xyz=144$.

$\therefore x=3, y=6$ এবং $z=8$,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8})$.

**উদা. 7.** Find the square root of $\frac{1}{2}(3x-1)+\sqrt{2x^2+x-6}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{2}\{(3x-1)+2\sqrt{2x^2+x-6}\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{(2x-3)+(x+2)+2\sqrt{(2x-3)(x+2)}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\}^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\right)$.

[ দ্রষ্টব্য : এখানে $2x^2+x-6$এর দুইটি উৎপাদক $2x-3$ ও $x+2$ এই উৎপাদকদ্বয়ের সমষ্টি $3x-1$ ; এইভাবে সাজান হইয়াছে। ]

উদা. 8. Find the square root of $1+a^2+\sqrt{(1+a^2+a^4)}$.

প্রদত্ত রাশি $=1+a^2+\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}$

$=\frac{1}{2}\{2+2a^2+2\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+a+a^2)+(1-a+a^2)+2\sqrt{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}\}$

$=\frac{1}{2}\{\sqrt{(1+a+a^2)}+\sqrt{(1-a+a^2)}\}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(1+a+a^2)}+\sqrt{(1-a+a^2)}\}$.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রত্যেক সংখ্যা বা রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক। যথা, 4এর বর্গমূল $+2$ ও $-2$, কারণ $(+2)^2=4$ এবং $(-2)^2=4$. অনুরূপে $a^2+b^2+2ab$ এর বর্গমূল $\pm(a+b)$, কিন্তু সাধারণতঃ ধনাত্মক বর্গমূলটিই গণ্য করা হয়। তোমরা সমাধানে উভয় বর্গমূলই দেখাইবে।]

## 43. দ্বিপদ করণীর করণীনিরসক উৎপাদক

এই পুস্তকের প্রথম খণ্ডের করণী অধ্যায়ে করণী সংক্রান্ত অনেক বিষয় আলোচিত হইয়াছে এবং তৎসঙ্গে করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয়ও দেখান হইয়াছে। নিম্নের উদাহরণগুলিও দেখ।

### উদাহরণমালা 14

উদা. 1. Find the rationalising factor of $\sqrt[p]{x}-\sqrt[q]{y}$.

মনে কর, $\sqrt[p]{x}$ বা $x^{\frac{1}{p}}=a$ এবং $\sqrt[q]{y}$ বা $y^{\frac{1}{q}}=b$,

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=(a-b)$.

এক্ষণে যদি $p$ ও $q$ এর ল.সা.গু. $n$ হয়, তবে $a^n$ ও $b^n$ দুইটিই মূলদ হইবে, সুতরাং $a^n-b^n$ রাশিটিও মূলদ হইবে।

এখানে $n$ যে-কোন ধনাত্মক জোড় বা বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, $a^n - b^n$ রাশিটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\because \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + b^{n-1})$

এবং $a^n - b^n$ এখানে মূলদ,

$\therefore \quad (a-b)$ কে $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + b^{n-1})$ দ্বারা গুণ করিলে $a^n - b^n$ গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$= a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + b^{n-1}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণে $p$ ও $q$-এর ল. সা. গু. $n$ বলিয়া $a^n$ মূলদ বলা হইল কেন তাহা বুঝিয়া লও। $\because$ $p$ ও $q$ এর ল. সা. গু. $n$, $\therefore$ $n$কে $p$ বা $q$ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে। মনে কর, ভাগফল দুইটি যথাক্রমে $m$ ও $r$. $\therefore \quad a^n = (x^{\frac{1}{p}})^n = x^{\frac{n}{p}} = x^m$ এবং ইহা মূলদ, $\therefore$ $a^n$ মূলদ। অনুরূপে $b^n$ মূলদ। ]

উদা. 2. Find the rationalising factor of $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b}$ বা $a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{n}}$.

মনে কর, $a^{\frac{1}{m}} = x$ এবং $b^{\frac{1}{n}} = y$ ; সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= x + y$.

এখন, যদি $m$ ও $n$-এর ল. সা. গু. $p$ হয়, তবে $x^p$ ও $y^p$ দুইটিই মূলদ, সুতরাং $x^p + y^p$ মূলদ হইবে।

(i) $p$ জোড় ( even ) হইলে $x^p - y^p$ রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p - y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} - y^{p-1})$ হইয়া থাকে। অতএব, তখন $x+y$ কে $x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} - y^{p-1}$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক

$$= x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots\cdots + xy^{p-2} - y^{p-1}.$$

(ii) $p$ যদি বিজোড় হয়, তবে $x^p+y^p$ রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p+y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots\cdots-xy^{p-2}+y^{p-1})$.

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots\cdots-xy^{p-2}+y^{p-1}.$$

উদা. 3. Find the rationalising factor of $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

প্রদত্ত রাশি$=2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}$, এখানে সূচকের দুইটি হর 2 ও 3 এর ল. সা. গু. 6.

মনে কর, $a=2^{\frac{1}{2}}$ এবং $b=3^{\frac{1}{3}}$ ; $\therefore$ এখানে $a^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$.

$b^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=9$ ; অতএব $a^6$, $b^6$ এবং $a^6-b^6$ প্রত্যেকটি মূলদ।

এক্ষণে, $a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$.

$\therefore$ $a+b$ এর করণী নিরসক উৎপাদক

$$=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5.$$

$\therefore$ $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ এর নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=(2^{\frac{1}{2}})^5-(2^{\frac{1}{2}})^4.\,3^{\frac{1}{3}}+(2^{\frac{1}{2}})^3.(3^{\frac{1}{3}})^2-(2^{\frac{1}{2}})^2.(3^{\frac{1}{3}})^3$$
$$+(2^{\frac{1}{2}}).\,(3^{\frac{1}{3}})^4-(3^{\frac{1}{3}})^5$$

$$=2^{\frac{5}{2}}-2^2.\,3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{3}{2}}.\,3^{\frac{2}{3}}-2.3+2^{\frac{1}{2}}.\,3^{\frac{4}{3}}-3^{\frac{5}{3}}$$
$$=4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}.\,\sqrt[3]{9}-6+3\sqrt{2}.\,\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}.$$

উদা. 4. Find the rationalising factor of $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$.

$$\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1=(9^{\frac{1}{3}})-3^{\frac{1}{3}}+1=3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1$$

$=(3^{\frac{1}{3}})^2-3^{\frac{1}{3}}+1=a^2-a+1$ [$a=3^{\frac{1}{3}}$ ধরিয়া]

$\because$ $a^2-a+1$ কে $a+1$ দ্বারা গুণ করিলে $a^3+1$ হয়

অর্থাৎ এখানে $(3^{\frac{1}{3}})^3+1$ বা $3+1$ মূলদ রাশি হয়,

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক$=a+1=\sqrt[3]{3}+1$.

উদা. 5. Find the rationalising factor of $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$
$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=a+b-c+2\sqrt{ab},$$

এখন দেখিতে হইবে ইহাকে কি দিয়া গুণ করিলে $\sqrt{ab}$কে করণীমুক্ত করা যায়। দেখা যাইতেছে যে

$$\{2\sqrt{ab}+(a+b-c)\}\{2\sqrt{ab}-(a+b-c)\}=4ab-(a+b-c)^2$$

এবং ইহা মূলদ।

আবার, $2\sqrt{ab}-(a+b-c)=2\sqrt{ab}-a-b+c$

$$=(\sqrt{c})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$=(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

উদা. 6. Express $\dfrac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}}$ with rational denominator.

এখানে হর $2-3^{\frac{1}{3}}$ এর সূচকগুলি 1 ও $\frac{1}{3}$ এবং সূচকদ্বয়ের হরগুলির ল. সা. গু. 3.

$\because\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

$\therefore$ এখানে করণী নিরসক উৎপাদক $=(2)^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2$

এক্ষণে প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব ও হরকে ঐ উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{(2+3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}{(2-3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}$$

$$=\frac{11+8.3^{\frac{1}{3}}+4.3^{\frac{2}{3}}}{8-3}=\frac{11+8\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}}{5}.$$

[ অন্যান্য উদাহরণ পুস্তকের প্রথম খণ্ডে করণী অধ্যায়ে দেখ। ]

## Exercise 11

1. Find the square root of :—

(*a*) $41+6\sqrt{32}$ ; (*b*) $28-6\sqrt{3}$ ; (*c*) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ [C. U. '24]

(*d*) $\sqrt{50}-\sqrt{48}$ ; (*e*) $\sqrt{175}+\sqrt{147}$ ; (*f*) $10\frac{3}{4}+3\sqrt{7}$.

2. Find the square root of :—

(*a*) $\frac{1}{2}(4x-3)+\sqrt{3x^2-7x+2}$ (*b*) $1+x^4+\sqrt{x^8+x^4+1}$

(*c*) $16+2\sqrt{15}+4\sqrt{6}+4\sqrt{10}$ (*d*) $11-2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(*e*) $x-y+z+2\sqrt{xz-yz}$

3. Find the rationalising factors of :—

(*a*) $\sqrt[3]{3}+1$ (*b*) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ (*c*) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

(*d*) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

4. Express with a rational denominator :—

(*a*) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ (*b*) $\dfrac{3-\sqrt[3]{2}}{3+\sqrt[3]{2}}$

(*c*) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$ (*d*) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

5. Find the value of

$\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$, when $a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ and $b=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

6. Show that $(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=7\sqrt{10}$.

7. Find the value of $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}$ correct to 2 places of decimals.

8. Find the simplest value of

$$\sqrt{[\sqrt{5}+\sqrt{\{5+8\sqrt{(9-4\sqrt{5})}\}}]}$$

9. If $(x+y)^{\frac{1}{3}}+(y+z)^{\frac{1}{3}}+(z+x)^{\frac{1}{3}}=0$, show that

$$(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3).$$

10. If $x+x\sqrt{3}=10$, find the value of $x$ to 3 significant figures.

## Imaginary Quantity ( কাল্পনিক রাশি )

## ও

## Complex Quantity ( জটিল রাশি )

**44.** তোমরা জান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন রাশির বর্গ ধনাত্মক হইয়া থাকে। অতএব বলা যায় যে কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি হইতে পারে না। $\sqrt{-4}$ কখন $+2$ বা $-2$ হইতে পারে না, $\sqrt{-x^2}$ কখন $+x$ বা $-x$ এর সমান হইতে পারে না। কিন্তু যেমন $\sqrt{x}$ দ্বারা এমন একটি রাশি বুঝায় যাহার বর্গ $x$ অর্থাৎ $(\sqrt{x})^2 = x$, সেইরূপ বলা হয় যে $\sqrt{-x}$ এরূপ একটি রাশি যাহার বর্গ $(-x)$ অর্থাৎ $\sqrt{-x} \times \sqrt{-x} = -x$, বা, $(\sqrt{-x})^2 = -x$.

এইরূপ রাশির সম্পূর্ণ বাস্তব সত্তা নাই বলিয়া এইরূপ রাশিকে **কাল্পনিক** রাশি ( imaginary quantity ) বলা হয়।

$\sqrt{-1}$ একটি কাল্পনিক রাশি এবং ইহাকে **প্রতীক** $i$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

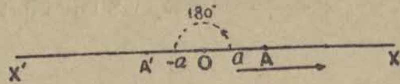
$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1, \text{ অতএব } (i)^2 = -1.$$

যে কোন কাল্পনিক রাশিকে একটি বাস্তব রাশি ও কাল্পনিক রাশি $\sqrt{-1}$ এর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা,

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \times (-1)} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = i\sqrt{3} ;$$
$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \times (-1)} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = i\sqrt{a}, \text{ ইত্যাদি।}$$

**45. প্রতীক $i$-এর জ্যামিতিক অর্থ :** আমরা জানি, যে-কোন পরিমাণকে একটি সরলরেখার উপর বিভিন্ন দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ কর যায়।

মনে কর, OX একটি সরলরেখা। যে-কোন পরিমাণকে ( ধর 2 মণ, 3 মণ, প্রভৃতি ) আমরা OX-এর উপর নির্ধারিত দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ করিতে




পারি। মনে কর, যদি 1 ইঞ্চি দ্বারা 1 মণ সূচিত করা হয়, তবে O হইতে X-এর দিকে 2 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য চিহ্নিত করিলে 2 মণ, 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা 3 মণ প্রকাশ করা যাইত।

যদি আমার 5 টাকা আয় দেখাইতে হয়, তবে OX বরাবর 5 একক দৈর্ঘ্য দ্বারা তাহা প্রকাশ করা যায় ; কিন্তু 5 টাকা ব্যয় দেখাইতে হইলে আর OX বরাবর দৈর্ঘ্য দ্বারা তাহা প্রকাশ করা যাইবে না। 5 টাকা ব্যয় 5 টাকা আয়ের বিপরীত প্রক্রিয়া বুঝায় বলিয়া OX সরলরেখার বিপরীত দিকে অর্থাৎ XOকে X′ পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া O হইতে OX′ বরাবর 5 একক দৈর্ঘ্য দ্বারা 5 টাকা ব্যয় প্রকাশ করা যাইবে। অতএব বুঝা গেল, OX বরাবর যে রেখা দ্বারা 5 টাকা আয় প্রকাশ করা হইয়াছে, তাহা যদি 180° কোণ ঘুরিয়া OX-এর সহিত বিপরীত দিকে এক সরলরেখায় অবস্থিত হয়, তবে নূতন অবস্থানে ঐ রেখাদ্বারা 5 টাকা ব্যয় প্রকাশ পাইবে।

এক্ষণে দেখ, $-1$ দ্বারা এরূপ একটি প্রক্রিয়া বুঝায় যাহা কোন রাশিতে প্রয়োগ করিলে রাশিটির চিহ্ন ( ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ) পরিবর্তিত হইয়া যায়। আমরা দেখিয়াছি যে $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ হয়, সুতরাং বুঝা গেল যে, কোন রাশির উপর $\sqrt{-1}$ প্রক্রিয়াটি একই দিকে দুইবার প্রয়োগ করিলে উহার চিহ্ন পরিবর্তিত হইয়া যায়।

চিত্রে মনে কর, OA দৈর্ঘ্য $a$ রাশিকে সূচিত করিয়াছে। এখন $a$ রাশির উপর $\sqrt{-1}$ প্রক্রিয়া OX-এর দিকে দুইবার প্রয়োগ করিলে এই বুঝাইবে যে, OA রেখা 180° কোণ ঘুরিয়া OX-এর বিপরীত দিকে একই সরলরেখায় OA′ রূপে অবস্থিত হইবে। অতএব $\sqrt{-1}$ প্রক্রিয়া দ্বারা এক সমকোণে আবর্তন

বুঝায়। ইহাই $\sqrt{-1}$ বা $i$ প্রতীকের অর্থ। $i$ দ্বারা এই আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ( anti-clockwise ) ধরা হয়, সুতরাং $-i$ দ্বারা উহার বিপরীত অভিমুখে ( clockwise ) এক সমকোণ পরিমাণ আবর্তন বুঝাইবে।

**46. $i$-এর বিভিন্ন ঘাত।** বীজগণিতীয় সকল নিয়ম $i$ সম্বন্ধে প্রয়োজ্য।

**($a$) $i$-এর ধনাত্মক ঘাত**

$$(i)^1=i=\sqrt{-1}\,;\ (i)^2=(\sqrt{-1})^2=-1\,;\ (i)^3=i^2i=-i\,;$$
$$(i)^4=(i^2)^2=(-1)^2=1\,;\ (i)^5=(i)^4.i=1\times i=i\,;$$
$$(i)^6=i^4\,.\,i^2=1\times -1=-1.$$

সাধারণভাবে যদি $n$ কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে

$$i^{4n}=(i^4)^n=(1)^n=1\,;\ i^{4n+1}=i^{4n}\,.i=i\,;\ i^{4n+2}=i^{4n}.i^2=-1\,;$$
$$i^{4n+3}=i^{4n}.\,i^3=-i.$$

**($b$) $i$-এর ঋণাত্মক ঘাত**

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i\,;\qquad i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1\,;$$
$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^2.i}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i^2}=i\,;\ i^{-4}=(i^{-2})^2=(-1)^2=1\,;$$
$$i^{-5}=\frac{1}{i^4.i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i\,;$$

সাধারণভাবে $n$ কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$i^{-4n}=\frac{1}{i^{4n}}=\frac{1}{(1)^n}=\frac{1}{1}=1\,;\ i^{-(4n+1)}=\frac{1}{i^{4n+1}}=\frac{1}{i^{4n}\,.\,i}=\frac{1}{i}=-i$$
$$i^{-(4n+2)}=\frac{1}{i^{4n+2}}=-1\,;\text{ ইত্যাদি।}$$

(c) (i) $3i+2i=5i$, (ii) $8i-5i=3i$;

(iii) $5i\times 3i=15i^2=15\times -1=-15$,

(iv) $5i\div 3i=\frac{5}{3}$, (v) $ai\times ai=a^2i^2=-a^2$,

(vi) $ai\times bi=abii=abi^2=-ab$.

## জটিল রাশি ( Complex quantity )

47. দুইটি বাস্তব সংখ্যা ( যথা, $a$ ও $b$ ) যদি $a+ib$ এইরূপ আকারে যুক্ত হয়, তবে $a+ib$কে জটিল রাশি বলে। জটিল রাশির ইহাই সাধারণ আকার। অতএব জটিল রাশির দুইটি অংশের মধ্যে একটি ( যথা, $a$ ) বাস্তব এবং অপরটি ( যথা, $ib$ ) কাল্পনিক।

$a+ib$ এর যদি $b=0$ হয়, তবে $a+ib=a$ অর্থাৎ রাশিটি বাস্তব রাশিতে পরিণত হয়। আবার যদি $a=0$ হয়, তবে $a+ib=ib$, অর্থাৎ রাশিটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক রাশিতে পরিণত হয়।

48. **পূরক জটিল রাশি।** সমান অংশবিশিষ্ট দুইটি জটিল রাশির মধ্যে যদি কেবল কাল্পনিক অংশের চিহ্ন দুইটি পরস্পর বিপরীত হয়, তবে একটি জটিল রাশিকে অন্যটির **অনুবন্ধী জটিল রাশি** (Conjugate Complex quantity ) বা পূরক জটিল রাশি বলে। যথা, $a+ib$ ও $a-ib$.

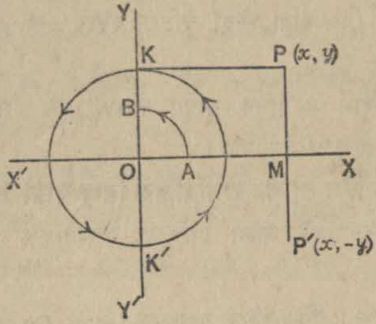
### 49. জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ

**(1) কোন বাস্তব সংখ্যাকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ।**

মনে কর, $x$ একটি বাস্তব ( real ) সংখ্যা, ইহাকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

XOX′ একটি সরলরেখা লওয়া হইল। উহাকে $x$-অক্ষ বা **বাস্তব অক্ষ** ( real axis ) বলা হয়। উহার উপর অবস্থিত কোন বিন্দু দ্বারা বাস্তব সংখ্যা প্রকাশিত হইবে। উহার উপর একটি স্থির বিন্দু O লওয়া হইল, উহাকে মূলবিন্দু (origin) বলা হয় এবং উহা দ্বারা শূন্য (0) সংখ্যা সূচিত হয়।

এক্ষণে OX এর উপর A ও M এরূপ দুইটি বিন্দু লওয়া হইল যেন OA $=1$ এবং $\frac{OM}{OA}=x$ হয়। অতএব, M বিন্দু এখানে $x$ এই বাস্তব সংখ্যা




( চিত্র A )

প্রকাশ করিবে। $x$ যদি ঋণাত্মক (অর্থাৎ $-x$) হয়, তবে M বিন্দুটি OX এর বিপরীত দিকে OX′ এর উপর অবস্থিত হইবে।

অতএব, যে কোন বাস্তব সংখ্যাকে XOX′ এই বাস্তব অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

## (2) কোন কাল্পনিক সংখ্যাকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ।

মনে কর, $iy$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা যাহার $y$ বাস্তব। ইহাকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

XOX′ এর O বিন্দু দিয়া XOX′ এর সহিত লম্বভাবে YOY′ সরলরেখা টানা হইল। এই YOY′ সরলরেখাকে ( $y$-অক্ষকে ) **কাল্পনিক বা অবাস্তব অক্ষ** ( imaginary axis ) বলা হয়। ইহার উপর B ও K এরূপ দুইটি বিন্দু লও যেন OB $=$ OA $=1$ এবং $\frac{OK}{OB}=y$ হয়। আমরা পূর্বে দেখিয়াছি যে, কোন রাশির উপর $i$ ( বা $\sqrt{-1}$) প্রক্রিয়া দ্বারা এক সমকোণে ঘড়ির কাঁটার

বিপরীত দিকে আবর্তন বুঝায়। অতএব, এখানে K বিন্দু দ্বারা $iy$ সূচিত হইবে।

$iy$ ঋণাত্মক (অর্থাৎ $-iy$) হইলে OY এর বিপরীত দিকে OY′ এর উপর অবস্থিত K′ বিন্দু দ্বারা উহা সূচিত হইবে এবং এখানে $OK'=OK$ হইবে।

অতএব, যে কোন কাল্পনিক সংখ্যা YOY′ এই অবাস্তব অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

**(3) কোন জটিল রাশির জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ।**

মনে কর, $x+iy$ এই জটিল রাশিকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

চিত্র-A এর M ও K বিন্দু হইতে যথাক্রমে OX ও OY এর উপর দুইটি লম্ব টানা হইল, উহারা যেন P বিন্দুতে ছেদ করিল। এই P বিন্দু দ্বারা $x+iy$ এই জটিল রাশিটি সূচিত হইবে।

এখানে বুঝা গেল যে, যদি $x$ ও $y$ বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$ হয়, তবে $x+iy$ এই জটিল রাশিটির জ্যামিতিক প্রকাশের জন্য এমন একটি **তল** (plane) আবশ্যক যাহার উপর XOX′ ও YOY′ দুইটি Cartesian axes of co-ordinates হয়। এই তলকে **জটিল সমতল** (complex plane) বলে।

অতএব XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয়গামী সমতলের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ হইলে ঐ বিন্দুটিই $x+iy$ জটিল রাশিকে প্রকাশ করে।

[**দ্রষ্টব্য :** O মূলবিন্দু দ্বারা $0+i0$ রাশি সূচিত হয়।]

**(4) অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী জটিল রাশির (conjugate complex number এর) জ্যামিতিক প্রকাশ।**

$x+iy$ জটিল রাশির অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী জটিল রাশি হইল $x-iy$.

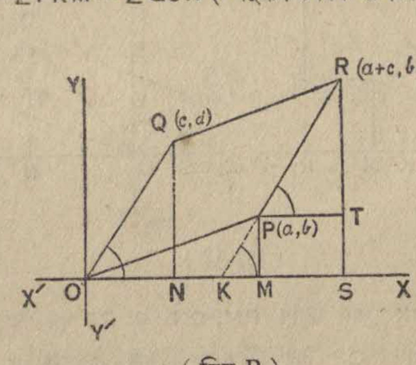
এখন (চিত্র A-এর) PMকে P′ পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন $MP'=PM$ হয়। এই P′ বিন্দু P এর প্রতিযোগী বিন্দু। অতএব P′ বিন্দু দ্বারা $x-iy$ জটিল রাশি প্রকাশ পায়।

(5) দুইটি জটিল রাশির যোগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ( **Addition of complex quantities** )

মনে কর, চিত্র B-এ P ও Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ জটিল রাশিদ্বয় সূচিত হইল। এক্ষণে, OPRQ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করা হইল। উহার R বিন্দু দ্বারা $a+ib$ ও $c+id$ এর যোগফল সূচিত হইবে, অর্থাৎ $(a+c)+i(b+d)$ সূচিত হইবে।

**প্রমাণ ঃ** OX এর উপর PM, QN ও RS লম্ব এবং RS এর উপর PT লম্ব টানা হইল। RP-এর বর্ধিতাংশ যেন OX-কে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\angle$RPT $=$ $\angle$PKM $=$ $\angle$QON ( অনুরূপ কোণ বলিয়া )




( চিত্র B )

এক্ষণে $\triangle$RPT ও $\triangle$OQN এর $\angle$PTR $=$ $\angle$QNO ( সমকোণ বলিয়া )

$\angle$RPT $=$ $\angle$QON, এবং PR $=$ OQ ( সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় ),

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, $\therefore$ ON $=$ PT $=$ MS, এবং QN $=$ RT ;

$\therefore$ OS $=$ OM $+$ MS $=$ OM $+$ ON $= a+c$,

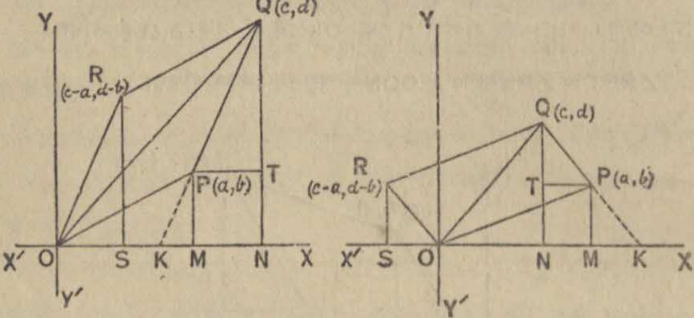
এবং RS $=$ ST $+$ RT $=$ PM $+$ QN $= b+d$.

অতএব, R বিন্দু দ্বারা $(a+c)+i(b+d)$ অর্থাৎ $a+ib$ ও $c+id$ এর যোগফল সূচিত হইল।

**(6) দুইটি জটিল রাশির অন্তরফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ( Subtraction of complex numbers ).**

মনে কর, চিত্র C-এ P ও Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ জটিল রাশিদ্বয় সূচিত হইল।

এক্ষণে, PQ যোগ করিয়া OPQR সামান্তরিক অঙ্কিত করা হইল। উহার R বিন্দু দ্বারা প্রদত্ত জটিল রাশিদ্বয়ের অন্তরফল সূচিত হইবে।




( চিত্র C )

**প্রমাণ :** XOX′ এর উপর PM, QN ও RS লম্ব এবং QN এর উপর PT লম্ব টানা হইল। QP এর বর্ধিতাংশ যেন OXকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে △PQT ও △ROS এর ∠QPT = ∠PKM = ∠ROS, ∠QTP = ∠RSO, এবং PQ = OR, ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ প্রথম চিত্রে OS = PT = NM = ON − OM = $c-a$,

এবং দ্বিতীয় চিত্রে OS = PT = OM − ON = $a-c$.

কিন্তু এখানে OS ঋণাত্মক বলিয়া OS = $-(a-c)=c-a$,

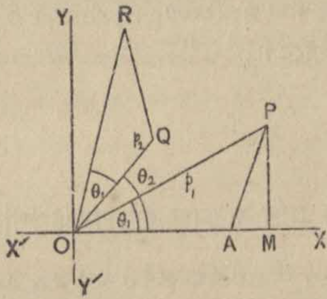
আবার, উভয় চিত্রে RS = TQ = QN − PM = $d-b$.

অতএব, R বিন্দু দ্বারা $-(a-c)+i(d-b)$ বা $(c-a)+i(d-b)$ সূচিত হইল অর্থাৎ $a+ib$ ও $c+id$ এর অন্তরফল সূচিত হইল।

(7) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ (Multiplication of complex numbers).

চিত্র D-এ মনে কর $OA=1$, $OP=p_1$ এবং $\angle POA=\theta_1$ ; আবার $OQ=p_2$ ও $\angle AOQ=\theta_2$.

এক্ষণে $\theta_1$ এর সমান করিয়া $\angle QOR$ আঁকা হইল যেন $OR=p_1p_2$ হয়। OX এর উপর PM লম্ব টান।




(চিত্র D)

প্রমাণ : $OM=p_1\cos\theta_1$ এবং $PM=p_1\sin\theta_1$, সুতরাং P বিন্দু দ্বারা $p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ জটিল রাশি সূচিত হয়। অনুরূপে Q বিন্দু দ্বারা $p_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ জটিল রাশি সূচিত হয়।

এক্ষণে, $OA=1$, $OP=p_1$, $OQ=p_2$, এবং $\angle AOR=\theta_1+\theta_2$

$$\therefore\ \frac{OA}{OP}=\frac{1}{p_1}=\frac{p_2}{p_1p_2}=\frac{OQ}{OR} \text{ এবং } \angle AOP=\theta_1=\angle QOR$$

$\therefore$ $\triangle AOP$ ও $\triangle QOR$ সদৃশ।

R হইতে OX এর উপর লম্ব টানিয়া দেখা যায় যে, R বিন্দু $p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ জটিল রাশিকে প্রকাশ করে।

আবার, $p_1\ (\cos\theta_1+i\ \sin\theta_1)\times p_2\ (\cos\theta_2+i\ \sin\theta_2)$

$=p_1p_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$[\because\ i^2=-1]$

$=p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\ \sin\ (\theta_1+\theta_2)\}.$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, R বিন্দুটি দুইটি জটিল রাশির গুণফল সূচিত করিতেছে।

(8) চিত্র D-এ যদি $\angle AOR=\theta_2-\theta_1$ এবং $OR=\frac{p_1}{p_2}$ হয়, তবে প্রমাণ করা যায় যে, R বিন্দু দ্বারা $p_1\ (\cos\theta_1+i\ \sin\theta_1)$ ও $p_2\ (\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ এর ভাগফল সূচিত হইবে।

## 50. কাল্পনিক রাশি সংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য

**উপ. 1.** যদি $a+ib=0$ হয়, তবে $a=0$ এবং $b=0$ হইবে।

**প্রমাণঃ** $\because\ a+ib=0,\ \ \therefore\ a=-ib,$

$\therefore$ বর্গ করিয়া $a^2=-b^2$, বা, $a^2+b^2=0.$

এক্ষণে, $a^2$ ও $b^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া উহাদের কোনটি ঋণাত্মক নহে। দুইটি পূর্ণবর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হইতে হইলে তাহাদের প্রত্যেকটি শূন্য হইতে হইবে।

অতএব, $a=0$, এবং $b=0$,

**উপ. 2.** যদি $a+ib=c+id$ হয়, তবে $a=c$ এবং $b=d$ হইবে।

**প্রমাণঃ** $\because\ a+ib=c+id,$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া পাই $a-c=-i\ (b-d),$

$\therefore\ (a-c)^2=-(b-d)^2$ [ বর্গ করিয়া ]

$\therefore\ (a-c)^2+(b-d)^2=0.$

এক্ষণে, বামপক্ষের প্রত্যেক পদ পূর্ণবর্গ বলিয়া ঋণাত্মক নহে এবং দুইটি পূর্ণবর্গ রাশির সমষ্টি এখানে 0 বলিয়া উহাদের প্রত্যেকটির মান শূন্য।

$\therefore\ \ a-c=0$ এবং $b-d=0.$

অতএব, $a=c$ এবং $b=d.$

**দ্রষ্টব্য :** এই উপপাদ্য হইতে জানা গেল যে, দুইটি কাল্পনিক রাশি সমান হইলে উভয়ের বাস্তব অংশদ্বয় পরস্পর সমান এবং উভয়ের কাল্পনিক অংশদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

**উপ. 3.** দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশির ( Conjugate Complex quantities এর ) যোগফল এবং গুণফল উভয়ই বাস্তব হইবে।

**প্রমাণ :** $a+ib$ এবং $a-ib$ ঐরূপ দুইটি রাশি।

(i) উহাদের সমষ্টি $=a+ib+a-ib=2a$, ইহা বাস্তব।

(ii) আবার $(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$, ইহা বাস্তব।

[ **দ্রষ্টব্য :** ঐরূপ রাশিদ্বয়ের অন্তরফল কিন্তু কাল্পনিক রাশি হইবে। যথা, $(a+ib)-(a-ib)=a+ib-a+ib=2ib$ অর্থাৎ কাল্পনিক রাশি। ]

**উপ. 4.** দুইটি জটিল রাশির সমষ্টি বা অন্তরফল জটিল রাশি হইবে।

**প্রমাণ :** মনে কর, রাশি দুইটি $a+ib$ এবং $c+id.$

এক্ষণে, উহাদের সমষ্টি $=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$, ইহা একটি জটিল রাশি।

আবার, উহাদের অন্তরফল $=(a+ib)-(c+id)$

$=(a-c)+i(b-d)$, ইহা একটি জটিল রাশি।

**অনুসিদ্ধান্ত :** বিভিন্ন কাল্পনিক রাশির বীজগণিতীয় সমষ্টি একটি কাল্পনিক রাশি হইবে।

মনে কর, $a+ib,\ c+id,\ -(x+iy)$, প্রভৃতি বিভিন্ন কাল্পনিক রাশি। উহাদের সমষ্টি $=(a+c-x+\cdots)+i(b+d-y+\cdots)$. যেহেতু এই সমষ্টির আকার $A+iB$, অতএব উহা একটি কাল্পনিক রাশি।

উপ. 5. দুই বা যে কোন সংখ্যক কাল্পনিক রাশির গুণফলও কাল্পনিক রাশি হইবে।

(i) মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি কাল্পনিক রাশি।

একক্ষণে, $(a+ib)(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd$

$=ac+i(bc+ad)-bd$ [ $\because i^2=-1$ ];

$=(ac-bd)+i(bc+ad)$,

ইহা $A+iB$ আকারের বলিয়া কাল্পনিক রাশি।

(ii) মনে কর, $a+ib$, $c+id$, $x+iy$, প্রভৃতি কতিপয় কাল্পনিক রাশি।

এক্ষণে, $(a+ib)(c+id)(x+iy)=(ac+ibc+iad+i^2bd)(x+iy)$

$=\{(ac-bd)+i(bc+ad)\}(x+iy)$

$=(ac-bd)x+i(ac-bd)y+i(bc+ad)x+i^2(bc+ad)y$

$=(ac-bd)x+i(acy-bdy+bcx+adx)-(bc+ad)y$

$=(acx-bdx-bcy-ady)+i(acy-bdy+bcx+adx)$,

ইহা $A+iB$ আকারের বলিয়া একটি কাল্পনিক রাশি।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যে কোন সংখ্যক কাল্পনিক রাশির গুণফল একটি কাল্পনিক রাশি হয়।

উপ. 6. দুইটি জটিল রাশির ভাগফলও একটি জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ: মনে কর, রাশি দুইটি $a+ib$ ও $c+id$.

এক্ষণে, $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

[ হরের অনুবন্ধী জটিল রাশিদ্বারা লব ও হরকে গুণ করিয়া ]

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2-i^2d^2}$$

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

ইহা $A+iB$ আকারের বলিয়া একটি জটিল রাশি।

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে যদি $bc=ad$ হয় তবে ভাগফলটি বাস্তব হইবে। ]

উপ. 7. জটির রাশির যে কোন ধনাত্মক ঘাতও একটি জটিল রাশি হইবে।

**প্রমাণ :** $(a+ib)^2=a^2+i^2b^2+2iab=(a^2-b^2)+2abi,$

ইহা $A+iB$ আকারের বলিয়া জটিল রাশি।

আবার, $(a+ib)^3=a^3+3a^2ib+3ai^2b^2+i^3b^3$

$=a^3+3a^2ib-3ab^2-ib^3$

[ $\because$ $i^2=-1$ এবং $i^3=i^2i=-i$ ]

$=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3),$

ইহাও $A+iB$ আকারের বলিয়া জটিল রাশি।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $(a+ib)$ এর যে কোন ঘাতই জটিল রাশি হইবে।

উপ. 8. জটিল রাশির যে কোন মূল একটি জটিল রাশি হইবে।

**প্রমাণ :** মনে কর, $a+ib$ এর $n$-তম মূল $x$.

$\therefore\ \sqrt[n]{a+ib}=x,$ বা $(a+ib)^{\frac{1}{n}}=x,$ $\therefore\ a+ib=x^n.$

এখানে যদি বলা যায় যে $x$ বাস্তব, তবে $x^n$ বাস্তব হইবে।

$\therefore\ a=x^n$ হইবে, কারণ সমীকরণটির উভয় পক্ষের বাস্তব অংশ সমান। অতএব, এস্থলে $b$-এর মান শূন্য হইয়া যাইতেছে এবং $a+ib$ এর কাল্পনিক

অংশ শূন্য হইলে উহা একটি বাস্তব রাশি হইয়া যাইবে ; কিন্তু তাহা কল্পনা-বিরুদ্ধ, কারণ স্বীকার করা আছে যে, $a+ib$ একটি কাল্পনিক রাশি।

অতএব, $x$ একটি জটিল রাশি অর্থাৎ $a+ib$ এর যে কোন মূলও একটি জটিল রাশি।

## 51. কাল্পনিক রাশির বর্গমূল নির্ণয়

মনে কর, কাল্পনিক রাশিটি $a+ib$.

কাল্পনিক রাশির যে কোন মূল কাল্পনিক রাশি হয় বলিয়া মনে কর, $\sqrt{a+ib}=x+iy$ ( এখানে $x$ ও $y$ দুইটিই বাস্তব )।

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$$a+ib=x^2+i^2y^2+2ixy=x^2-y^2+2ixy.$$

এক্ষণে, $\because$ উভয় পক্ষের বাস্তব অংশদ্বয় সমান ও কাল্পনিক অংশদ্বয় সমান,

$\therefore\ x^2-y^2=a\cdots(1)$ এবং $2ixy=ib$, বা $2xy=b\cdots(2)$.

আবার, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$,

$$\therefore\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots(3).$$

এখন $(3)+(1)$ করিয়া পাই

$$2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a,\ \text{বা},\ x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

$$\therefore\ x=\pm\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}.$$

আবার, $(3)-(1)$ করিয়া পাই

$$2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a,\ \text{বা},\ y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

$$\therefore\ y=\pm\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

এক্ষণে (2) হইতে দেখা যাইতেছে যে, $b$-এর যে চিহ্ন ( ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ) $xy$ এরও সেই চিহ্ন হইবে।

অতএব, (i) **$b$ যদি ধনাত্মক হয়,** তবে $x$ ও $y$ দুইটিই ধনাত্মক কিংবা দুইটিই ঋণাত্মক হইবে।

তখন **নির্ণেয় বর্গমূল**

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}+i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}].$$

(ii) **$b$ যদি ঋণাত্মক হয়,** তবে $x$ ও $y$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত ( একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক ) হইবে।

তখন **নির্ণেয় বর্গমূল**

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}-i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a\}^{\frac{1}{2}}].$$

## 53. Modulus ( মডিউলাস )

তোমরা জান যে প্রত্যেক রাশির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়।

$a^2+b^2$ এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে ( অর্থাৎ $+\sqrt{a^2+b^2}$ কে ) $a+ib$ ও $a-ib$ এই দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ( conjugate ) জটিল রাশির মডিউলাস ( modulus ) বলে।

ইহা সংক্ষেপে mod $(a+ib)$ লেখা হয়।

অতএব, mod $(12+5i)=+\sqrt{12^2+5^2}=13.$

### 53. মডিউলাস সংক্রান্ত উপপাদ্য

**উপপাদ্য 1.** দুইটি কাল্পনিক ( বা জটিল ) রাশির গুণফলের মডিউলাস ঐ রাশিদ্বয়ের মডিউলাস দুইটির গুণফলের সমান।

( The modulus of the product of two complex numbers is equal to the product of their modulii ).

**প্রমাণ :** মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $a+ib$ এবং $c+id$, সুতরাং উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ ও $\sqrt{c^2+d^2}$,

$\therefore$ ঐ মডিউলাস দুইটির গুণফল $=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$.

আবার, ঐ রাশিদ্বয়ের গুণফল

$$=(a+ib)\times(c+id)=ac+i(bc+ad)+i^2bd$$
$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$\therefore$ ঐগুণফলের মডিউলাস $=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}.$$

$\therefore$ $\text{mod }(a+ib)(c+id)=\text{mod }(a+ib)\times\text{mod }(c+id)$.

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

**উপপাদ্য 2.** দুইটি কাল্পনিক (অর্থাৎ জটিল) রাশির ভাগফলের মডিউলাস ঐ রাশিদ্বয়ের মডিউলাস দুইটির ভাগফলের সমান।

(The modulus of the quotient of two complex quantities is the quotient of their modulii).

**প্রমাণ :** মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $a+ib$ এবং $c+id$.

সুতরাং উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ ও $\sqrt{c^2+d^2}$.

$\therefore$ ঐ মডিউলাস দুইটির ভাগফল $=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$.

আবার, ঐ রাশিদ্বয়ের ভাগফল $=\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$\therefore$ ঐ ভাগফলের মডিউলাস $=\sqrt{\left\{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right\}}$

$$=\sqrt{\left\{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

$$\therefore\quad \text{mod}\,\frac{a+ib}{c+id}=\frac{\text{mod }(a+ib)}{\text{mod }(c+id)}.$$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

**উপপাদ্য 3.** কোন কাল্পনিক রাশি ও তাহার অনুবন্ধী কাল্পনিক রাশির একই মডিউলাস।

( A complex number and its conjugate have the same modulus ).

মনে কর, রাশিদ্বয় $x+iy$ এবং $x-iy$.

এক্ষণে, $\text{mod }(x+iy)=\sqrt{(x)^2+(y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$,

এবং $\text{mod }(x-iy)=\sqrt{(x)^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে দেখ, $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. অতএব, বলা যায় যে, দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশির যে কোনটির মডিউলাস রাশি-দ্বয়ের গুণফলের ধনাত্মক বর্গমূলের সমান। ]

## 54. এককের ঘনমূল ( Cube roots of unity )

Unity বলিতে 1 বুঝায়। মনে কর, $\sqrt[3]{1}=x$.

অতএব, $x^3=1$, বা, $x^3-1=0$, বা, $(x-1)(x^2+x+1)=0$,

$\therefore$ হয় $x-1=0\cdots(1)$ অথবা, $x^2+x+1=0\cdots(2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x=1$.

আবার, (2) হইতে পাই $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

$\therefore$ 1-এর ঘনমূল $=1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

[ এখানে দেখা যাইতেছে যে, 1-এর তিনটি ঘনমূলের মধ্যে একটি ( প্রথমটি ) বাস্তব এবং অন্য দুইটি কাল্পনিক। ]

## 55. একের ঘনমূল সম্বন্ধে কতিপয় সিদ্ধান্ত

**I. 1-এর ঘনমূল তিনটির সমষ্টি শূন্য।**

প্রমাণঃ সমষ্টি $=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3})$

$=1+\frac{1}{2}\times(-2)=1-1=0.$

II. 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির **প্রত্যেকটি অপরটির বর্গ।**

প্রমাণঃ 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটি হইল $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

এক্ষণে, $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})$

$=\frac{1}{4}(-2-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

আবার, $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})$

$=\frac{1}{4}(-2+2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

অতএব, 1-এর প্রত্যেক কাল্পনিক ঘনমূল অপর কাল্পনিক ঘনমূলের বর্গ।

III. 1-এর কাল্পনিক **ঘনমূল দুইটির গুণফল 1** হইবে।

প্রমাণঃ $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}$

$=\frac{1}{4}\{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2\}=\frac{1}{4}(1+3)=\frac{1}{4}\times 4=1.$

দ্রষ্টব্য : $\because$ 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল 1,

$\therefore$ প্রত্যেক কাল্পনিক ঘনমূল অপরটির অন্যোন্যক।

একের ঘনমূল তিনটিকে সাধারণতঃ $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহাদের মধ্যে প্রথমটি বাস্তব এবং $\omega, \omega^2$ কাল্পনিক। প্রত্যেক কাল্পনিক ঘনমূলটি অপর কাল্পনিক ঘনমূলের বর্গ বলিয়া একটিকে $\omega$ ধরিলে, অন্যটি $\omega^2$ হইবে।

এক্ষণে, উপরের সিদ্ধান্তগুলি হইতে ( এই প্রতীক চিহ্নগুলির সাহায্যে ) পাই, (i) $1+\omega+\omega^2=0$, এবং (ii) $\omega.\omega^2=1$, বা, $\omega^3=1$.

অন্যরূপেও এইগুলি পাওয়া যায়। যথা—

(i) $\because$ $x^2+x+1=0$ এই সমীকরণেরই একটি বীজ $\omega$, $\therefore$ এই বীজটির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। অতএব, $\omega^2+\omega+1=0$ হইল।

[ অনুসিদ্ধান্ত : $\omega+\omega^2=-1$ ]

(i) $\because$ $x^3-1=0$ এই সমীকরণেরও একটি বীজ $\omega$,

$\therefore$ $\omega^3-1=0$, বা, $\omega^3=1$, অর্থাৎ $\omega.\omega^2=1$ হইল।

[ **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** যে কোন সংখ্যার তিনটি ঘনমূল হইয়া থাকে। উহাদের একটি বাস্তব ( উহাই পাটীগণিতিক ঘনমূল ) এবং অপর দুইটি কাল্পনিক। 1এর ঘনমূলগুলির সাহায্যে ঐ ঘনমূলগুলি নির্ণয় করা যায়। প্রথমে প্রদত্ত সংখ্যাটির পাটীগণিতীয় ঘনমূলটি নির্ণয় করিয়া তাহাকে যথাক্রমে $1, \omega$ ও $\omega^2$ দ্বারা গুণ করিলেই সংখ্যাটির ঘনমূল তিনটি পাইবে। ]

### 56. $\omega$ এর বিভিন্ন ঘাত ( Powers of $\omega$ )

**$\omega$ এর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত 1, অথবা $\omega$ অথবা $\omega^2$ হইবে।**

আমরা জানি $\omega^3=1$,

$\therefore$ $\omega^4=\omega^3.\omega=\omega$ ; $\omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2$ ; $\omega^6=(\omega^3)^2=(1)^2=1$ ;

$\omega^7=\omega^6.\omega=\omega$ ; $\omega^8=\omega^6.\omega^2=\omega^2$ ; ইত্যাদি।

এক্ষণে, সাধারণভাবে মনে কর, $n$ যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ( positive integer ).

যদি $n=3m$ ($m$ কোন অখণ্ড সংখ্যা ) হয়,

তবে $\omega^n=\omega^{3m}=(\omega^3)^m=(1)^m=1$ ;

যদি $n=3m+1$ হয়, তবে $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\omega=1.\omega=\omega$ ;

যদি $n=3m+2$ হয়, তবে $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}.\omega^2=1.\omega^2=\omega^2$.

অতএব, যদি $n$কে 3 দিয়া ভাগ করিলে যথাক্রমে 0, 1, বা 2 ভাগশেষ থাকে, তাহা হইলে $\omega^n$ যথাক্রমে 1, $\omega$ বা $\omega^2$ এর সমান হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\omega$এর যে-কোন ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাত 1, অথবা $\omega$, অথবা $\omega^2$ হয়।

## উদাহরণমালা 15

**উদা. 1.** Find the product of $3\sqrt{-2}+4\sqrt{-3}$ and $5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3}$.

$\sqrt{-2}=\sqrt{2\times-1}=\sqrt{2}\times\sqrt{-1}=\sqrt{2}i$, এবং $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$.

এক্ষণে, $(3\sqrt{-2}+4\sqrt{-3})(5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3})$

$=(3\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i)(5\sqrt{2}i-2\sqrt{3}i)$

$=i(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})\times i(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$=i^2(3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\times5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\times2\sqrt{3})$

$=-1(30+20\sqrt{6}-6\sqrt{6}-24)=-(6+14\sqrt{6})$.

**উদা. 2.** Express $\dfrac{1}{4-\sqrt{-3}}$ with a rational denominator.

$$\frac{1}{4-\sqrt{-3}}=\frac{1}{4-i\sqrt{3}}=\frac{1\times(4+i\sqrt{3})}{(4-i\sqrt{3})(4+i\sqrt{3})}=\frac{4+i\sqrt{3}}{(4)^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{4+i\sqrt{3}}{16+3}=\frac{4+\sqrt{3}i}{19}.$$

উদা. 3. Express $\dfrac{2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-5}-3\sqrt{-3}}$ with a rational denominator.

$$\frac{2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-5}-3\sqrt{-3}}=\frac{2\sqrt{5}i+3\sqrt{3}i}{2\sqrt{5}i-3\sqrt{3}i}=\frac{i(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{i(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{47+12\sqrt{15}}{-7}=-\frac{47+12\sqrt{15}}{7}.$$

উদা. 4. Simplify $\dfrac{x+iy}{x-iy}+\dfrac{x-iy}{x+iy}$.

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(x+iy)^2+(x-iy)^2}{(x)^2-(iy)^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

উদা. 5. Simplify $\dfrac{(a+i)^2}{a-i}-\dfrac{(a-i)^2}{a+i}$.

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a-i)(a+i)}$

$$=\frac{(a+i-a+i)\{(a+i)^2+(a+i)(a-i)+(a-i)^2\}}{(a)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{2i(3a^2-1)}{a^2+1}=\frac{i(6a^2-2)}{a^2+1}.$$

উদা. 6. Express $\dfrac{4+3i}{3-2i}$ in the form of $A+iB$.

$$\frac{4+3i}{3-2i}=\frac{(4+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{12+9i+8i+6i^2}{(3)^2-(2i)^2}=\frac{12+17i-6}{9+4}$$

$=\dfrac{6+17i}{13}=\dfrac{6}{13}+\dfrac{17}{13}i$, ইহা $A+iB$ আকারের।

**উদা. 7.** Find the square root of $16-30i$. [P. U. '36]

মনে কর, $\sqrt{16-30i}=x+iy$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া $16-30i=x^2-y^2+2ixy$

$\therefore \quad x^2-y^2=16\cdots\cdots(1)$ এবং $2xy=-30\cdots\cdots(2)$.

$\therefore \quad (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(16)^2+(-30)^2$
$\qquad\qquad =1156=(34)^2$

$\therefore \quad x^2+y^2=34\cdots\cdots(3)$

(3) ও (1) যোগ করিয়া পাই $x^2=25$, $\quad \therefore \quad x=\pm 5$

(3) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $y^2=9$, $\quad \therefore \quad y=\pm 3$.

এখানে $\because$ $xy$ ঋণাত্মক, $\therefore$ $x$ ও $y$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore \quad x=5$ হইলে $y=-3$, এবং $x=-5$ হইলে $y=3$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=5-3i$ এবং $-5+3i=\pm(5-3i)$.

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** এইরূপ বর্গমূল নির্ণয়ের ইহাই সাধারণ প্রণালী। অনেক ক্ষেত্রে পরীক্ষা দ্বারা (by inspection) সহজে বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। পরের উদাহরণগুলি দেখ।

**উদা. 8.** Extract the square root of $2(21i-20)$. [P. U. '45]

$2(21i-20)=42i-40=2.3.7i+9-49$
$\qquad =2.3.7i+(3)^2+(7i)^2 \; [\because \; (7i)^2=49i^2=-49]$
$\qquad =(3+7i)^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(3+7i)$.

**উদা. 9.** Find the square root of $i$.

$\because \quad i=\frac{1}{2}\times 2i=\frac{1}{2}(1+2i-1)=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)$
$\qquad =\frac{1}{2}(1+i)^2$.

$\therefore \quad \sqrt{i}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

**উদা. 10.** Extract the square root of $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$.

[ C. U. '24 ]

$$\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}$$

$$=\frac{-3+1+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{(\sqrt{-3}+1)^2}{4}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{\sqrt{-3}+1}{2}=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{-3}+1).$

**উদা. 11.** Find the square root of $x+i\sqrt{1-x^2}$.

$$x+i\sqrt{1-x^2}=\frac{2x+2i\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)+2i\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})^2}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}).$

**উদা. 12.** Show that $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0.$

এখানে লব $=1+i^2+2i+1+i^2-2i=2+2i^2=2-2=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{0}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0.$

**উদা. 13.** Show that a real value of $x$ will satisfy the equation $\dfrac{1-ix}{1+ix}=a-ib$, if $a^2+b^2=1$. [C.U. '33]

$\because\ \dfrac{1-ix}{1+ix}=\dfrac{a-ib}{1},$

$\therefore\ 1-ix=a+axi-ib-i^2bx$

$=a+axi-ib+bx\ [\because\ -i^2=1].$

বা, $bx+axi+ix=1-a+ib$, বা, $x\{b+(a+1)i\}=(1-a)+ib$

$\therefore \quad x=\frac{(1-a)+ib}{b+(a+1)i}$, ইহাকে মূলদ হরবিশিষ্ট করিয়া পাই

$$x=\frac{\{(1-a)+ib\}\{b-(a+1)i\}}{b^2-\{(a+1)i\}^2}=\frac{2b+i(a^2+b^2-1)}{b^2+(a+1)^2}$$

এক্ষণে দেখা যাইতেছে যে, যদি $a^2+b^2-1=0$ হয় অর্থাৎ যদি $a^2+b^2=1$ হয়, তবে $i\,(a^2+b^2-1)=0$ হইবে এবং তখন $x$ এর মান $\frac{2b}{b^2+a^2+2a+1}$ বা $\frac{2b}{2a+2}$ বা $\frac{b}{a+1}$ হইবে এবং এই মানটি বাস্তব।

অতএব প্রমাণিত হইল যে, $a^2+b^2=1$ হইলে $x$এর একটি বাস্তব মান দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

**উদা. 14.** Find the modulus of $12+5i$.

এখানে $\text{mod}\,(12+5i)=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$.

**উদা. 15.** Find the modulus of $(3+4i)(5+12i)$.

এখানে, $\text{mod}\,(3+4i)(5+12i)=\text{mod}\,(3+4i)\times\text{mod}\,(5+12i)$

$$=\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25}\times\sqrt{169}=5\times13=65.$$

**উদা. 16.** Find the modulus of $\frac{24+7i}{3-4i}$.

এখানে $\text{mod}\,\frac{24+7i}{3-4i}=\frac{\text{mod}\,(24+7i)}{\text{mod}\,(3-4i)}=\frac{\sqrt{24^2+7^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$$=\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5.$$

**উদা. 17.** Find the cube roots of $-1$.

মনে কর, $x=\sqrt[3]{-1}$, অতএব $x^3=-1$,

$\therefore \quad x^3+1=0$, বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$,

অতএব, হয় $x+1=0 \cdots\cdots(1)$
অথবা $x^2-x+1=0 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $x+1=0, \quad \therefore \quad x=-1.$

আবার (2) ,, ,, $x^2-x+1=0,$

$$\therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4.1}}{2}=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}).$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূলগুলি $=-1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

উদা. 18. If $\dfrac{m+in}{p+iq}=x+iy$, shew that $\dfrac{m-in}{p-iq}=x-iy$.

$$\because \quad \frac{m+in}{p+iq}=x+iy, \qquad \therefore \quad \frac{(m+in)(p-iq)}{(p+iq)(p-iq)}=x+iy,$$

বা, $$\frac{(mp+nq)+i(np-mq)}{p^2+q^2}=x+iy,$$

বা, $$\frac{mp+nq}{p^2+q^2}+i\frac{np-mq}{p^2+q^2}=x+iy,$$

$$\therefore \quad x=\frac{mp+nq}{p^2+q^2}, \; y=\frac{np-mq}{p^2+q^2}.$$

এক্ষণে, $$\frac{m-in}{p-iq}=\frac{(m-in)(p+iq)}{(p-iq)(p+iq)}=\frac{(mp+nq)-i(np-mq)}{p^2+q^2}$$

$$=\frac{mp+nq}{p^2+q^2}-i\frac{np-mq}{p^2+q^2}=x-iy.$$

উদা. 19. Resolve into factors $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.
[ C. U. '30 ]

প্রদত্ত রাশি

$$a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$$

[ $\because \quad \omega^3=1, \omega+\omega^2=-1, \omega=\omega^3.\omega=\omega^4$
এবং $\omega^4+\omega^2=\omega+\omega^2=-1$ ]

$=(a^2+ab\omega^2+ac\omega)+(b^2\omega^3+ab\omega+bc\omega^2)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad +(c^2\omega^3+bc\omega^4+ca\omega^2)$
$=a(a+b\omega^2+c\omega)+b\omega(b\omega^2+a+c\omega)+c\omega^2(c\omega+b\omega^2+a)$
$=(a+b\omega^2+c\omega)(a+b\omega+c\omega^2).$

উদা. 20. Prove that $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9.$
[ P. U. '36, '46 ]

প্রদত্ত রাশি $=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega.\omega^3)(1-\omega^2.\omega^6)$
$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$
[ $\because$ $\omega^3=1$ এবং $\omega^6=(1)^2=1$ ]
$=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2$
$=(1-\omega+1+\omega+\omega^3)^2$
[ $\because$ $1+\omega+\omega^2=0$, $\therefore$ $1+\omega=-\omega^2$ ]
$=(2+\omega^3)^2=(2+1)^2=9$ [ $\because$ $\omega^3=1$ ]

উদা. 21. Show that $(\omega a+\omega^2b)(\omega^2a+\omega b)=a^2-ab+b^2.$
[ C. U. '29 ]

$(\omega a+\omega^2b)(\omega^2a+\omega b)=\omega^3a^2+\omega^2ab+\omega^4ab+\omega^3b^2$
$=a^2+(\omega^2+\omega^4)ab+b^2$ [ $\because$ $\omega^3=1$ ]
$=a^2+(\omega^2+\omega^3.\omega)ab+b^2$
$=a^2+(\omega^2+\omega)ab+b^2$
$=a^2-ab+b^2$ [ $\because$ $\omega^2+\omega+1=0$, $\therefore$ $\omega^2+\omega=-1$ ]

উদা. 22. Prove that $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0.$

$\because$ $1+\omega+\omega^2=0$, $\therefore$ $1+\omega=-\omega^2$ এবং $1+\omega^2=-\omega$

এক্ষণে প্রদত্ত বামপক্ষ $=(-\omega^2-\omega^2)^3-(-\omega-\omega)^3$
$=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3=-8\omega^6+8\omega^3=-8(\omega^3)^2+8$
$=-8+8$ [ $\because$ $\omega^3=1$ ] $=0.$

উদা. 23. If $\omega=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$, find the value of $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^2+\omega^{16})$. [P. U. '40]

প্রদত্ত সর্ত হইতে $\omega^2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$.

$\because\ 1+\omega+\omega^2=0,\quad \therefore\ 1+\omega=-\omega^2,\ 1+\omega^2=-\omega$.

আবার, $\because\ \omega^3=1,\quad \therefore\ \omega^4=\omega^3.\omega=\omega,\ \omega^8=(\omega^3)^2\omega^2=\omega^2$

এবং $\omega^{16}=\omega^{15}.\omega=(\omega^3)^5.\omega=(1)^5.\omega=\omega$.

এক্ষনে, প্রদত্ত রাশি $=(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)\times$

$$(1-\omega^2+\omega)=(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2)$$
$$=16\omega^6=16(\omega^3)^2=16\times1=16.$$

উদা. 24. If $x=a+b,\ y=a+b\omega,\ z=a+b\omega^2$, show that $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$. [ P. U. '43 ]

$$x^3+y^3+z^3=(a+b)^3+(a+b\omega)^3+(a+b\omega^2)^3$$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b)+a^3+b^3\omega^3+3ab\omega(a+b\omega)$$
$$+a^3+b^3\omega^6+3ab\omega^2(a+b\omega^2)$$
$$=a^3+b^3+a^3+b^3+a^3+b^3+3ab(a+b+a\omega+b\omega^2+a\omega^2+b\omega^4)$$
[ $\because\ \omega^3=1$, এবং $\omega^6=1$ ]
$$=3(a^3+b^3)+3ab\{a(1+\omega+\omega^2)+b(1+\omega+\omega^2)\}$$
$=3(a^3+b^3)$ [ $\because\ 1+\omega+\omega^2=0$ ].

## Exercise 12

Multiply :—

1. $2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2}$ by $5\sqrt{-3}-2\sqrt{-2}$.
2. $4\sqrt{-5}-2\sqrt{-7}$ by $5\sqrt{-5}-3\sqrt{-7}$.
3. $2\sqrt{-3}+5\sqrt{-7}$ by $4\sqrt{-6}-3\sqrt{-2}$.

Express with a rational denominator :—

4. $\dfrac{1}{3+\sqrt{-5}}$.
5. $\dfrac{3+\sqrt{-5}}{2-\sqrt{-3}}$

6. $\frac{2-7i}{3+5i}-\frac{2+7i}{3-5i}$ 7. $\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}$

8. Simplify $\frac{2a+ib}{a+2ib}-\frac{2a-ib}{a-2ib}$.

Express the following in the form of $A+iB$ :

9. $\frac{2+3}{3-2i}$ 10. $\frac{(2+i)^2}{3+i}$ 11. $\frac{(2-i)^2}{2-3i}$ [ U. U. '48 ]

12. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ 13. $(2+i)(3+i)$

14. $(2+i)(3+2i)(4-7i)$

Find the square roots of :—

15. $4+6\sqrt{-5}$ 16. $7-30\sqrt{-2}$ [ P. U. '48 ]

17. $-11-60\sqrt{-1}$ [ P. U. '44 ] 18. $7-24i$.

19. $-7-24i$ [ P. U '39 ] 20. $-i$

21. $2(15i-8)$. 22. $\frac{-1+3\sqrt{-11}}{2}$

23. $\frac{23+102i}{3+2i}$ 24. $4x^2-y^2+4xyi$.

25. $3a+i\sqrt{a^4-7a^2+1}$. 26. $a^2+\frac{1}{a^2}-4i\left(a-\frac{1}{a}\right)-6$.

27. Simplfy $(2+3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}+(2-3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}$. [ P. U. '39 ]

Show that :—

28. $\sqrt{i}-\sqrt{-i}=\sqrt{-2}$. 29. $\frac{1+i}{1-i}=i$.

30. $(2+i)^{-2}+(2-i)^{-2}=\frac{6}{25}$.

31. $\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})\}^{6n}=1$.

32. $(19+5\sqrt{-24})^{\frac{1}{2}}+(19-5i\sqrt{24})^{\frac{1}{2}}=10$.

33. Find the value of $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^{15}$
$+\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^{15}$.

34. Find the value of $(5+12i)^{-\frac{1}{2}}+(5-12i)^{-\frac{1}{2}}$.

Find the **modulii** of the following :—

35. $4+3i$ 36. $12-5i$ 37. $(3-4i)(12+5i)$.

38. $\dfrac{20+15i}{12+5i}$. 39. $\dfrac{(2+i)(1-3i)}{(3+i)(2+3i)}$.

Resolve into factors :—

40. $x^3+y^3$ 41. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 42. $x^2+1$.

43. $x^2-xy+y^2$.

44. Show that $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ is the product of two imaginary factors. [C. U. '30]

45. Find the fourth roots of unity.

Prove that :—

46. $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4$.

47. $(1+\omega-\omega^2)^3+(1-\omega+\omega^2)^3=-16$.

48. $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5=32$.

49. $\dfrac{a\omega+b+1}{b\omega^2+a+\omega^2}=\omega$.

50. If $a=2+3i$ and $b=2-3i$, find the value of $a^2+ab+b^2$.

51. Express $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ as the sum of two squares.

52. If $x=-2+\sqrt{-3}$, find the value of
$x^4+8x^3+24x^2+32x+17$.

53. If $a=2+i$, show that $a^4+4a^3-18a^2+4a+45=0$.

54. If $\sqrt{x-iy}=a-ib$, show that $\sqrt{x+iy}=a+ib$.

55. Prove that $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n=2$, if $n$ be a multiple of 3, and $=-1$ if $n$ be any other integer. [P. U.]

## ( Simultaneous Quadratic Equation )

# 57. দ্বিঘাত সহসমীকরণ

( দুইটি অজ্ঞাত রাশি )

### উদাহরণমালা 16

উদা. 1. Solve $\left.\begin{array}{r}x-y=2\\xy=3\end{array}\right\}$

[ প্রথম প্রণালী ] $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(2)^2+4\times3=16$

$\therefore\ \ x+y=\pm\sqrt{16}=\pm4.$

এখন, $\left.\begin{array}{r}x+y=4\\x-y=2\end{array}\right\}$

( যোগ ) $2x=6.$ $\therefore\ \ x=3$, সুতরাং $y=4-3=1.$

আবার, $\left.\begin{array}{r}x+y=-4\\x-y=\ \ 2\end{array}\right\}$

( যোগ ) $2x=-2,$ $\therefore\ \ x=-1$, সুতরাং $y=-4+1=-3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $\left.\begin{array}{r}x=3\\y=1\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{r}x=-1\\y=-3\end{array}\right\}$

[ দ্বিতীয় প্রণালী ] প্রথম সমীকরণ হইতে $x=y+2$

এখন $x$ এর মান $y+2$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $(y+2)y=3,$

বা, $y^2+2y=3,$ বা, $y^2+2y-3=0,$

বা, $(y+3)(y-1)=0,$ $\therefore\ \ y=1$ বা $-3.$

এক্ষণে, যদি $y=1$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=1+2=3$ ;

আবার যদি $y=-3$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=-3+2=-1.$

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{r}x=3\\y=1\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{r}x=-1\\y=-3\end{array}\right\}$

[ দ্রষ্টব্য : এই প্রণালীতে যে কোন সমীকরণের সমাধান করা যায়। সুবিধা মত কোন সময়ে $x$ এর মান বা কোন সময়ে $y$ এর মান একটি সমীকরণ

হইতে লইয়া অন্যটিতে বসাইতে হয়। উত্তর লিখিবার সময় সমাধানে $x$ এর একটি মানের সহিত $y$ এর ঠিক অনুরূপ মানটি একত্র লইয়া উত্তর লিখিবে। ]

**উদা. 2.** Solve $x+y=7\cdots(1)$, $x^2+2y=17\cdots(2)$.

সমীকরণ-(1) হইতে পাই $y=7-x\cdots(3)$.

সমীকরণ-(2) এ $y$-এর স্থানে $7-x$ বসাইয়া পাই $x^2+2(7-x)=17$,

বা, $x^2-2x-3=0$, বা, $(x-3)(x+1)=0$,

$\therefore\ x=3$ বা $-1$.

এক্ষণে, $x=3$ হইলে (3) হইতে পাই $y=7-3=4$;

এবং $x=-1$ „ „ „ „ $y=7+1=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=\ \ 8\end{array}\right\}$

**উদা. 3.** Solve $\left.\begin{array}{l}x+y=7\\x^2+y^2=25\end{array}\right\}\begin{array}{l}\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots(2)\end{array}$

$\because\ x+y=7$, $\therefore\ x=7-y\cdots(3)$

এক্ষণে, সমীকরণ-(2) এ $x$এর এই মান বসাইয়া পাই $(7-y)^2+y^2=25$,

বা, $49-14y+2y^2=25$, বা, $2y^2-14y+24=0$,

বা, $y^2-7y+12=0$, বা, $(y-3)(y-4)=0$, $\therefore\ y=3$, বা 4.

$y=3$ হইলে (3) হইতে পাই $x=7-3=4$.

$y=4$ „ „ „ „ $x=7-4=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}\right\}$

**উদা. 4.** Solve $\left.\begin{array}{l}x^2+xy=\ \ 15\cdots(1)\\x-y\ \ =\ \ 1\cdots(2)\end{array}\right\}$ [C. U. '15]

সমীকরণ-(2) হইতে পাই $y=x-1\cdots(3)$

সমীকরণ-(1) হইতে পাই $x^2+x(x-1)=15$, বা, $2x^2-x-15=0$,

বা, $(x-3)(2x+5)=0$, $\therefore\ x=3,\ -\frac{5}{2}$.

$x=3$ হইলে সমীকরণ-(3) হইতে পাই $y=3-1=2$ ;

$x=-\frac{5}{2}$ ,, ,, ,, ,, ,, $y=-\frac{5}{2}-1=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l}x=3\\ y=2\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l}x=-2\frac{1}{2}\\ x=-3\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

উদা. 5. Solve $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots(1)\\ x+y=9\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ [ C. U. '36 ]

(1) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$, সুতরাং $\frac{9}{xy}=\frac{1}{2}$, [ $\because \quad x+y=9$ ]

$$\therefore \quad xy=18.$$

$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9, \quad \therefore \quad x-y=\pm 3.$

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}x+y=9\\ x-y=3\end{array}\right\}$

( যোগ ) $2x=12, \quad \therefore \quad x=6$, সুতরাং (2) হইতে $y=9-6=3$.

আবার, $\left.\begin{array}{l}x+y=\ \ 9\\ x-y=-3\end{array}\right\}$

( যোগ ) $2x=6, \quad \therefore \quad x=3$, সুতরাং $y=9-3=6$.

$\therefore \left.\begin{array}{l}x=6\\ y=3\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l}x=3\\ y=6\end{array}\right\}$

উদা. 6. Solve $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, x+y=10.$ [ C. U. '38 ]

প্রথম সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$,

বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ [ $\because \quad x+y=10$ ]

বা, $\sqrt{xy}=4, \quad \therefore \quad xy=16$, বা, $x(10-x)=16$

[ $\because \quad y=10-x$ ( ২য় সমীকরণ হইতে )]

বা, $10x-x^2=16$, বা, $x^2-10x+16=0$,

বা, $(x-2)(x-8)=0, \quad \therefore \quad x=2$ বা 8.

এক্ষণে ২য় সমীকরণ হইতে $x=2$ হইলে $y=8$ এবং $x=8$ হইলে $y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2$, $y=8$ ; অথবা $x=8$, $y=2$.

**উদা. 7.** Solve $\left.\begin{array}{r} ax^2+by^2=a+b\cdots (1) \\ x+y=1\cdots\cdots (2)\end{array}\right\}$ [C. U. '29]

$\because\ x+y=1, \quad \therefore\ y=1-x\cdots (3)$

এক্ষণে (1) হইতে $y$ এর মান $1-x$ বসাইয়া পাই

$ax^2+b(1-x)^2=a+b$, বা, $ax^2+b-2bx+bx^2-a-b=0$,

বা, $(a+b)x^2-2bx-a=0$,

$$\therefore\ x=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2+4a(a+b)}}{2(a+b)}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2+ab}}{a+b},$$

এবং $y=1-x=1-\dfrac{b\pm\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a+b}=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a+b}$.

**উদা. 8.** Solve $x+y=a+b$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2$. [C. U. '31]

$\because\ x+y=a+b, \quad \therefore\ y=a+b-x$, এই মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{a+b-x}=2$, বা, $\dfrac{a}{x}-1+\dfrac{b}{a+b-x}-1=0$,

বা, $\dfrac{a-x}{x}+\dfrac{b-a-b+x}{a+b-x}=0$, বা, $\dfrac{a-x}{x}-\dfrac{a-x}{a+b-x}=0$,

বা, $(a-x)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+b-x}\right)=0$,

$\therefore\ a-x=0$, অথবা $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+b-x}=0$.

যদি $a-x=0$ হয়, তবে $x=a$ এবং তখন $y=a+b-x=a+b-a=b$.

আবার যদি, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+b-x}=0$ হয়, তবে $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a+b-x}$,

বা, $x=a+b-x$, বা, $2x=a+b$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}(a+b)$,

এবং তখন $y=(a+b)-x=(a+b)-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=a\\y=b\end{matrix}\right\}$ অথবা $x=y=\frac{1}{2}(a+b)$.

**উদা. 9.** Solve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots(1), \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\cdots(2)$. [ C. U. '25]

$\because \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$,

$\therefore \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+(1)^2=2\times 1$ [ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে ]

বা, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=1, \quad \therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1$.

এক্ষণে, $\left.\begin{matrix}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\\[4pt] \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\end{matrix}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=2, \quad \therefore x=a$,
এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=0, \quad \therefore y=0$.

অথবা $\left.\begin{matrix}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1\\[4pt] \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\end{matrix}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=0, \quad \therefore x=0$,
এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=-2, \therefore y=-b$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=a\\y=0\end{matrix}\right\}$ অথবা $\left.\begin{matrix}x=0\\y=-b\end{matrix}\right\}$

**উদা. 10.** Solve $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2, \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=2$. [C. U. '10]

$\because \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=2\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)$,

$\therefore (2)^2+\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=2\times 2$ [ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে]

বা, $\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=0, \quad \therefore \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0$.

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2 \\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া পাই $\frac{2a}{x}=2$, $\therefore\ x=a$
এবং বিয়োগ করিয়া পাই $\frac{2b}{y}=2$, $\therefore\ y=b$.

$\therefore\ x=a,\ y=b.$

উদা. 11. Solve $\left.\begin{array}{r}x+\frac{3}{y}=2\cdots(1) \\ y+\frac{3}{x}=-2\cdots(2)\end{array}\right\}$ [C. U. 1879]

(1) হইতে পাই $xy+3=2y\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $xy+3=-2x\cdots(4)$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে পাই $2y=-2x$, বা $y=-x\cdots(5)$

এক্ষণে, (1)এ $y$এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $x+\frac{3}{-x}=2$,

বা, $x^2-3=2x$, বা, $x^2-2x-3=0$,

বা, $(x-3)(x+1)=0$, $\therefore\ x=3$, বা $-1$.

$x=3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3$,

এবং $x=-1$ হইলে (5) হইতে পাই $y=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=3 \\ y=-3\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=-1 \\ y=1\end{array}\right\}$.

উদা. 12. Solve $x+y=3\cdots(1)$, $2x^2-5xy+2y^2=0\cdots(2)$. [C. U. '20]

সমীকরণ (2) হইতে $2x^2-4xy-xy+2y^2=0$,

বা, $(2x-y)(x-2y)=0$, $\therefore\ 2x-y=0$ অথবা $x-2y=0$.

এখন $\left.\begin{array}{r}x+y=3 \\ 2x-y=0\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $3x=3$, $\therefore\ x=1$,
$\therefore\ y=3-1=2$;

আবার, $\left.\begin{array}{r}x+y=3 \\ x-2y=0\end{array}\right\}$ বিয়োগ করিয়া $3y=3$, $\therefore\ y=1$,
সুতরাং $x=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=1 \\ y=2\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=2 \\ y=1\end{array}\right\}$.

উদা. 13. Solve $xy+x+y=27\cdots(1)$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdots(2)$.

[ C. U. '39 ]

(2) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$, বা $2(x+y)=xy$.

এখন (1) হইতে পাই $2(x+y)+(x+y)=27$, বা $3(x+y)=27$,

$\therefore\ x+y=9$. $\therefore\ xy+9=27$ [(1) হইতে ], $\therefore\ xy=18$.

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9$, $\therefore\ x-y=\pm3$.

এক্ষণে, $x+y=9$ এবং $x-y=\pm3$ এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=3\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=6\end{array}\right\}$.

উদা. 14. Solve $\left.\begin{array}{ll}(x+a)(y+b)=c^2 & \cdots(1)\\ x+y=a+b & \cdots(2)\end{array}\right\}$ [ C. U. '30 ]

(2) হইতে পাই $(x+a)+(y+b)=2(a+b)\cdots(3)$

[ উভয় পক্ষে $a+b$ যোগ করিয়া ]

মনে কর, $x+a=p$ এবং $y+b=q$, সুতরাং (3) ও (1) হইতে পাই

$p+q=2(a+b)$ এবং $pq=c^2$.

$\therefore (p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4(a+b)^2-4c^2=4\{(a+b)^2-c^2\}$

$\therefore p-q=\pm2\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

এখন, $p+q=2(a+b)$ $\cdots(4)$

এবং $p-q=\pm2\sqrt{(a+b)^2-c^2}$ $\cdots(5)$

যোগ করিয়া $2p=2\{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$

$\therefore\ p=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore\ x+a=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$, $\therefore x=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

আবার, (4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাই

$$2q=2\{a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$$

$\therefore\ q=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2},$

$\therefore\ y+b=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore\ y=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}.$

**উদা. 15.** Solve $5x-2y=0\cdots\cdots(1),\ \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}=\dfrac{11}{20}\cdots(2)$ [ C. U. '50 ]

(1) হইতে পাই $5x=2y,\ \therefore\ x=\dfrac{2y}{5},\quad \therefore\ x^2=\dfrac{4y^2}{25}.$

(2) হইতে পাই $\dfrac{3}{\frac{4y^2}{25}}-\dfrac{5}{y^2}=\dfrac{11}{20}$, বা, $\dfrac{75}{4y^2}-\dfrac{5}{y^2}=\dfrac{11}{20}$,

বা, $\dfrac{55}{4y^2}=\dfrac{11}{20}$, বা $44y^2=55\times20$, বা $y^2=\dfrac{55\times20}{44}=25$,

$\therefore\ y=\pm5.$ অতএব, $x=\dfrac{2y}{5}=\dfrac{2}{5}\times\pm5=\pm2.$

$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\}$ অথবা $\left.\begin{matrix}x=-2\\y=-5\end{matrix}\right\}.$

**উদা. 16.** Solve $x+y=5\cdots\cdots(1),\ x^2+y^2=8xy\cdots\cdots(2).$ [ C. U. '17 ]

$\because\ x+y=5,\ \therefore\ x^2+y^2+2xy=25$ ( বর্গ করিয়া ),

বা, $8xy+2xy=25$ [ $\because\ x^2+y^2=8xy$ ]

বা, $10xy=25$, বা $xy=\frac{5}{2}.$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times\frac{5}{2}=15.$

$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{15}\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $2x=5\pm\sqrt{15}$,

$\therefore\ x=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{15})$

এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $2y=5\mp\sqrt{15}$,

$\therefore\ y=\frac{1}{2}(5\mp\sqrt{15}).$

**উদা. 17.** Solve $(a-b)x+(a+b)y=a+b\cdots(1)$ and

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2a\cdots\cdots(2)$. [ C. U. '32 ]

(1) হইতে পাই $(a+b)y=(a+b)-(a-b)x\ldots(3)$

(2) হইতে পাই $bx+ay=2axy$, ইহার উভয় পক্ষকে $(a+b)$ দিয়া গুণ করিয়া পাই $b(a+b)x+a(a+b)y=2a(a+b)xy$,

বা, $b(a+b)x+a\{(a+b)-(a-b)x\}=2a\{(a+b)-(a-b)x\}x$

[ $(a+b)y$এর মান বসাইয়া ],

বা, $abx+b^2x+a(a+b)-a^2x+abx$

$$=2a^2x+2abx-2a(a-b)x^2,$$

বা, $2a(a-b)x^2+(b^2-3a^2)x+a(a+b)=0$ [ পক্ষান্তর করিয়া ]

বা, $2a(a-b)x^2-(a^2-b^2)x-2a^2x+a(a+b)=0$,

বা, $(a-b)x\{2ax-(a+b)\}-a\{2ax-(a+b)\}=0$,

বা, $\{2ax-(a+b)\}\{(a-b)x-a\}=0$,

$\therefore\ 2ax-(a+b)=0$, অথবা, $(a-b)x-a=0$,

$\therefore\ x=\frac{a+b}{2a}$, অথবা, $\frac{a}{a-b}$.

যদি $x=\frac{a+b}{2a}$ হয়, তবে (3) হইতে পাই

$$y=\frac{a+b}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}x=1-\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a+b}{2a}=1-\frac{a-b}{2a}=\frac{a+b}{2a}.$$

যদি $x=\frac{a}{a-b}$ হয়, তবে (3) হইতে পাই

$$y=1-\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a}{a-b}=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=y=\frac{a+b}{2a}$, অথবা, $x=\frac{a}{a-b}, y=\frac{b}{a+b}$.

উদা. 18. Solve $x^y = y^2$……(1)

$y^{2y} = x^4$……(2) [ C. U. '41, '45 ]

(2) হইতে পাই $(y^2)^y = x^4$, $\therefore$ (1) হইতে পাই $x^y = y^2$,

বা, $(x^y)^y = (y^2)^y$, বা $(x)^{y^2} = x^4$, $\therefore$ $y^2 = 4$, $\therefore$ $y = \pm 2$.

যদি $y = 2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $x^2 = 2^2$, $\therefore$ $x = \pm 2$.

যদি $y = -2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $(x)^{-2} = (-2)^2 = 4$,

বা, $\frac{1}{x^2} = 4$, $\therefore$ $x = \pm \frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \pm 2$, $y = 2$, অথবা, $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = -2$.

উদা. 19. Solve $x^y = y^x$.…(1), $x = 2y$…(2). [C. U. '35]

$\because$ $2y = x$, $\therefore$ $(2y)^y = x^y = y^x = y^{2y} = (y^2)^y$,

$\therefore$ $y^2 = 2y$, বা, $y^2 - 2y = 0$, বা $y(y-2) = 0$, $\therefore$ $y = 0, 2$.

যদি $y = 0$ হয়, তবে (2) হইতে পাই $x = 0$,

যদি $y = 2$ হয়, তবে (2) „ ,, $x = 2 \times 2 = 4$.

$\therefore$ $x = 0$, $y = 0$ ; অথবা, $x = 4$, $y = 2$.

উদা. 20. Solve $8.2^{xy} = 4^y$…(1), $9^x.3^{xy} = \frac{1}{27}$…(2). [C.U.'42]

(1) হইতে পাই $2^3 \times 2^{xy} = 2^{2y}$, বা $2^{3+xy} = 2^{2y}$,

$\therefore$ $3 + xy = 2y$…(3).

(2) হইতে পাই $3^{2x}.3^x = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$, বা, $3^{2x+xy} = 3^{-3}$,

$\therefore$ $2x + xy = -3$…(4).

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $3 - 2x = 2y + 3$, বা $-x = y$…(5).

এক্ষণে (3)এ $y$এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $3 - x^2 = -2x$,

বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$, বা, $(x-3)(x+1) = 0$, $\therefore$ $x = 3, -1$.

$x=\ \ 3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3$,
$x=-1$ „ „ „ „ $y=1$.

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=\ \ 3 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\ \ 1 \end{array}\right\}$.

উদা. 21. Solve $x^3+y^3=9\cdots(1)$, $x+y=3\cdots(2)$. [C.U. '16]

$\because\ x^3+y^3=9,\ \therefore\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9,$

বা, $(3)^3-3xy.3=9$, বা, $27-9xy=9$. $\therefore\ xy=2$,

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(3)^2-4\times 2=1,$

$\therefore\ x-y=\pm 1\cdots(3).$

এখন, (2) ও (3) হইতে পাই,

(a) $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ এবং (b) $\left.\begin{array}{l} x+y=\ \ 3 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

$\therefore$ (a) হইতে $x=2$, $y=1$ এবং (b) হইতে $x=1$, $y=2$.

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$.

উদা. 22. Solve $2^{3x}.4^y=128\cdots(1)$ and $9^{x+y}=27\ \cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $2^{3x}.2^{2y}=2^7$, বা, $2^{3x+2y}=2^7$,

$\therefore\ 3x+2y=7\cdots(3).$

(2) হইতে পাই $(3)^{2x+2y}=3^{3xy}$, $\therefore\ 2x+2y=3xy\cdots(4).$

এক্ষণে, (3) হইতে পাই $2y=7-3x$, $\therefore\ y=\dfrac{7-3x}{2}\cdots(5).$

$\therefore$ (4) হইতে পাই $3x\times\dfrac{7-3x}{2}=2x+(7-3x)=7-x,$

বা, $21x-9x^2=14-2x,$

বা, $9x^2-23x+14=0$, বা, $9x^2-14x-9x+14=0$,

বা, $(x-1)(9x-14)=0$, $\therefore\ x=1$, বা $\frac{14}{9}$.

$\therefore$ (5) হইতে পাই $y=2$, বা, $\frac{7}{6}$.

অতএব, $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=\frac{14}{9} \\ y=\ \frac{7}{6} \end{array}\right\}$.

### Exercise 13

Solve :—

1. $x+y=12,\ xy=35.$ 2. $x+y=7,\ x^2+y^2=29.$

3. $x+y=5,\ x^2+2y=13.$

4. $x+y=\frac{5}{6},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [ C. U. '37 ]

5. $x^2+y^2=1,\ 3x+4y=5.$ [ C. U. '22 ]

6. $x^2+xy=28,\ x-y=1.$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\ x+y=3.$ [ M. U. '1860 ]

8. $x^2+y^2=a,\ x+2y=1.$

*9. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3},\ x+y=10.$ [ C. U. '47 ]

*10. $x+\frac{4}{y}=1,\ y+\frac{4}{x}=25.$ [ C. U. '40 ]

11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{9},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}.$

12. $3x-y=8,\ y^2-8x=9.$ 13. $x^2+y^2=41,\ xy=20.$

*14. $2x^2+3xy+4y^2=24,\ x+3y=7.$ [ C. U. '16 ]

15. $y^x=4,\ y^2=2^x.$ [ C. U. '43 ]

16. $x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2},\ y+\frac{1}{x}=3.$ [ C. U. '48 ]

17. $3^x=9^y,\ 5^{x+y+1}=25^{xy}.$ [ C. U. '46 ]

*18. $4^x=2^y,\ (27)^{xy}=9^{y+1}.$

19. $x^2+y^2=b,\ x+2y=1.$

20. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18,\ x+y=12.$ [ C. U. '19 ]

21. $x^3-y^3=218,\ x-y=2.$ [ C. U. '17 ]

22. $x^2+y^2=74,\ xy=35.$

23. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{13}{6},\ x+y=13.$

24. $5x=2y,\ \frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20}.$ [ C. U. '50 ]

25. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2},\ \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}.$ [ C. U. '52 ]

26. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5,\ \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}.$ [ C. U. '53 ]

27. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5,\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [ U. P. B. '47 ]

28. $x+y=a+b,\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1.$ [ U. P. B. '51 ]

29. $ax^2+by^2=a+b,\ x+y=1.$ [ C. U. '29 ]

30. $x+y+xy=27,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$ [ P. U. '49 ]

31. $x+y-\sqrt{xy}=7,\ x^2+y^2+xy=133.$ [ C. U. '51 ]

32. $\left(x-a\right)\left(y-b\right)=ab,\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$ [ C. U. '34 ]

33. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}},\ 2x-3y=4.$ [ C. U. '49 ]

## তৃতীয় অধ্যায়

# TRIGONOMETRY

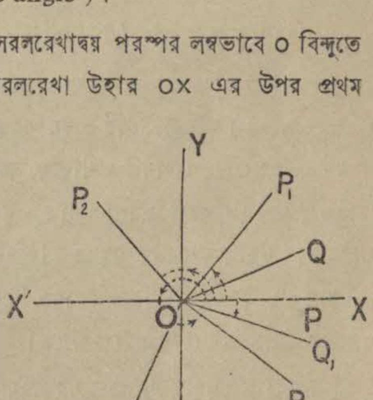
# ( ত্রিকোণমিতি )

## যে কোন পরিমাণের কোণ

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে কতিপয় নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত ( Trigonometrical ratios ) সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। তোমরা জান জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণ 0° হইতে 360° পর্যন্ত সীমাবদ্ধ এবং কোণগুলি ধনাত্মক ( Positive ) হইয়া থাকে। কিন্তু পরিমিতিতে কোণ যে-কোনও পরিমাণের এবং ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন প্রকারের হইতে পারে।

**1. ধনাত্মক কোণ ( Positive angle )।**

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, OP সরলরেখা উহার OX এর উপর প্রথম অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $OP_1$ অবস্থানে গেল। ইহার ফলে যে $POP_1$ বা $XOP_1$ কোণ উৎপন্ন হইল তাহা একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইল। উহা যদি তীর-নির্দিষ্ট দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে আরও ঘুরিয়া $OP_2$ অবস্থানে আসে, তবে $XOP_2$ কোণটি ধনাত্মক স্থূলকোণ হইবে। ঐরূপ OP রেখা




চিত্র 1

আরও ঘুরিয়া ক্রমশঃ $OP_3$ ও $OP_4$ অবস্থানে আসিলে যথাক্রমে ধনাত্মক প্রবৃদ্ধ কোণ $XOP_3$ এবং তিন সমকোণের অধিক কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা কম একটি ধনাত্মক প্রবৃদ্ধ কোণ $XOP_4$ উৎপন্ন করিবে। OP যদি আরও একটু ঘুরিয়া পূর্ব অবস্থানে OX এর সহিত মিলিত হয়, তবে চারি সমকোণ বা 360°-র সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। এখন যদি OP ঐভাবে সম্পূর্ণ একপাক ঘোরার পর আরও ঘুরিয়া OQ অবস্থানে আসে, তবে যে কোণটি উৎপন্ন হইল তাহা অবশ্যই চারি সমকোণ বা 360° অপেক্ষা বৃহত্তর ও ধনাত্মক।

এতএব, দেখা গেল যে ত্রিকোণমিতিতে একটি সরলরেখা তাহার এক প্রান্তকে কেন্দ্র করিয়া তাহার মূল অবস্থান হইতে ক্রমশঃ ঘুরিয়া যে কোন পরিমাণের কোণ ( angle of any magnitude ) উৎপন্ন করিতে পারে। আর উহা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ( anti-clockwise ) ঘুরিলে উৎপন্ন কোণগুলি ধনাত্মক হইবে।

2. **ঋণাত্মক কোণ ( Negative angle )।**

( চিত্র 1 ) যদি OP সরলরেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ( clockwise ) ঘুরিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে $OQ_1$ অবস্থানে আসে তবে উৎপন্ন $XOQ_1$ কোণটি **ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ** হইবে। ঐ অভিমুখে উহা আরও ঘুরিতে থাকিলে ক্রমশঃ ঋণাত্মক স্থূলকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ প্রভৃতি যে-কোন পরিমাণের ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করিবে।

অতএব, ত্রিকোণমিতিক কোণ যে-কোনও পরিমাণের এবং ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকারের হইতে পারে।

[ দ্রষ্টব্য ঃ ঘূর্ণায়মান OP সরলরেখাকে generating line বা radius vector বলে। ]

3. Quadrant ( পাদ )। দুইটি সরলরেখা XOX′ ও YOY′ পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিলে ( চিত্র 1 দেখ ) কাগজের সমতলটি চারিটি বিভাগে বিভক্ত হয় এবং প্রত্যেক বিভাগকে এক একটি পাদ ( Quadrant )

বলে। এখানে XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ ধরা হয়।

কোণের পরিমাণ সম্বন্ধে যাহা বলা হইয়াছে তাহা হইতে বুঝা যায় যে (চিত্র 1 দেখ),

(i) কোণগুলি **ধনাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

0° ও 90° এর মধ্যে হইলে তাহারা **প্রথম পাদে** অবস্থিত হয় ;
90° „ 180° „ „ „ „ **দ্বিতীয় পাদে** „ „
180° „ 270° „ „ „ „ **তৃতীয় পাদে** „ „
270° „ 360° „ „ „ „ **চতুর্থ পাদে** „ „

(ii) কোণগুলি **ঋণাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

0° ও −90° এর মধ্যে হইলে তাহারা **চতুর্থ পাদে** অবস্থিত হইবে ;
−90° ও −180° „ „ „ „ **তৃতীয় পাদে** „ „
−180° ও −270° „ „ „ „ **দ্বিতীয় পাদে** „ „
−270° ও −360° „ „ „ „ **প্রথম পাদে** „ „

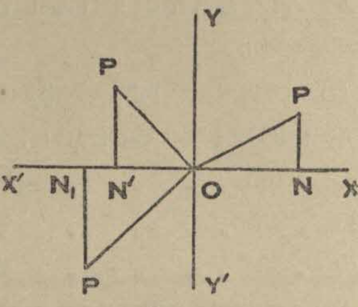
যদি কোনও কোণের পরিমাণ 750° হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে, OP রেখা প্রথম অবস্থান OX হইতে ধনাত্মক দিকে সম্পূর্ণ দুইবার ঘুরিয়া আরও 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। কারণ, $750° = 2 \times 360° + 30°$, সুতরাং সেস্থলে OP রেখাটি **প্রথম পাদে** অবস্থিত হইবে।

আবার, যদি কোন কোণের পরিমাণ −1235° হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে OP রেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে। কারণ, $-1235° = -360° \times 3 - 155°$, সুতরাং OP negative direction-এ পূরা 3 বার ঘুরিয়া OX অবস্থানে আসিবার পর আরও −155° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। অতএব, উহা তৃতীয় পাদে আসিয়াছে।

## 4. কোণানুপাতের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন (signs)।

তোমরা লেখ অঙ্কনের সময় শিখিয়াছ যে XOX′ ও YOY′ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রচলিত প্রথা অনুসারে O হইতে

OX ও OY বরাবর দূরত্বগুলিকে ধনাত্মক ( positive ) এবং OX′ ও OY′ বরাবর দূরত্বগুলিকে ঋণাত্মক ( negative ) ধরা হয়। অতএব, Y-অক্ষের ডানদিক positive এবং বাম-দিক negative ; আর X-অক্ষের উপরের দিক positive এবং নীচের দিক negative.



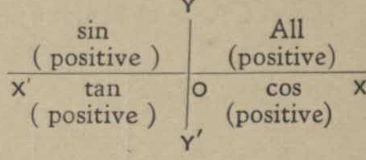
চিত্র 2

ত্রিকোণমিতিতেও এই নিয়মে কোণানুপাত নির্ণয় করা হয়। কেবল ঘূর্ণায়মান OP রেখাটি যে-কোন পাদেই থাকুক না কেন উহাকে সতত ধনাত্মক (positive) ধরিতে হইবে। মনে কর, OP প্রথম পাদে অবস্থিত আছে ( উপরের চিত্র 2 দেখ ) এবং PN ⊥ OX. এক্ষেত্রে OPN সমকোণী ত্রিভুজের OP, ON ও NP অর্থাৎ অতিভুজ, ভূমি ও লম্ব তিনটিই ধনাত্মক। OP যদি দ্বিতীয় পাদে থাকে এবং PN′⊥OX′ হয়, তবে OP ও N′P ধনাত্মক এবং ON′ ঋণাত্মক। অনুরূপে, তৃতীয় পাদে কেবল OP ধনাত্মক, কিন্তু $ON_1$ এবং $PN_1$ উভয়েই ঋণাত্মক। আর, চতুর্থ পাদে কেবল PN লম্বটি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, প্রথম পাদে সমস্ত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক। দ্বিতীয় পাদে কেবল $\sin\left(\frac{PN'}{OP}\right)$ ধনাত্মক ( সুতরাং sin-এর অন্যোন্যক cosecও ধনাত্মক ), কিন্তু অন্য অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদে কেবল tan ( সুতরাং তাহার অন্যোন্যক cotও ) ধনাত্মক, কিন্তু অপর অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। চতুর্থ পাদে কেবল cos ( সুতরাং উহার অন্যোন্যক secও ) ধনাত্মক, কিন্তু অন্যগুলি ঋণাত্মক।

এইরূপে OX অবস্থান হইতে ঘূর্ণায়মান OP রেখাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোনও কোণ উৎপন্ন করুক না কেন, উহা যে পাদে অবস্থিত থাকিবে

সেই অনুসারে কোণানুপাতগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন ( signs ) নির্ধারিত হইবে।




চিত্র 3

ইহাকে সংক্ষেপে বলা হয় (**All, sin, tan, cos**), অর্থাৎ প্রথম পাদে সমস্ত কোণানুপাত, দ্বিতীয়ে কেবল sin, তৃতীয়ে কেবল tan এবং চতুর্থ পাদে কেবল cos ধনাত্মক।

[ **দ্রষ্টব্য** : যে কোণানুপাতগুলি ধনাত্মক তাহাদের অন্যোন্যকগুলিও ধনাত্মক হইবে। কোন একটি কোণ চারিসমকোণের কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে বা হ্রাস পাইলে ঘূর্ণায়মান বাহুটি ( radius vector ) সম্পূর্ণ এক বা একাধিকবার ঘুরিয়া পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসে। সুতরাং অসংখ্য কোণের একই সীমারেখা হইতে পারে। ঐরূপ কোণগুলিকে coterminal angles বলে এবং $n.360^\circ+\theta$ দ্বারা কোণগুলিকে প্রকাশ করা হয় ( $n$ এখানে যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা। ) ]

## Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle $\theta$

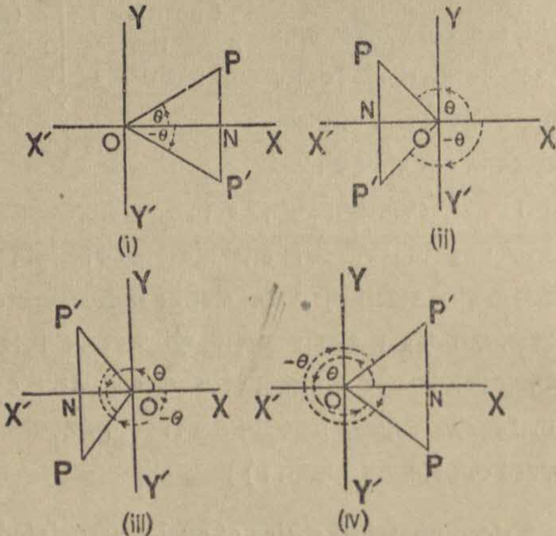
## ( একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত সংযুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত )

5. $\theta$-র যে-কোন মানে $(-\theta)$ **কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।**

( চিত্র 4এর প্রথম চিত্রে ) মনে কর, OP রেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OX অবস্থান হইতে OP অবস্থানে আসিয়া XOP কোণ উৎপন্ন করিল এবং উহার মান $\theta$, সুতরাং $\theta$ কোণটি ধনাত্মক। আবার মনে কর, OP রেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিয়া OX অবস্থান হইতে OP′ অবস্থানে আসিয়া XOP′ কোণ উৎপন্ন করিল এবং $\angle XOP' = \angle XOP$ হইল। অতএব, $\angle XOP'$ কোণটি ঋণাত্মক অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোণটি হইল $-\theta$.

এখন $PN \perp XOX'$ টানিয়া PNকে বর্ধিত কর। উহা যেন OP′কে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, ∠NOP = ∠NOP′, ∠PNO = ∠P′NO ( সমকোণ বলিয়া ), এবং OP = OP′ ; ∴ PON ও P′ON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইল। অতএব, ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলি সমান হইবে।




চিত্র 4

∴ −PN = P′N, বা P′N = −PN ( ∵ P′N ঋণাত্মক ), এবং OP = OP′ ( ∵ ঘূর্ণায়মান রেখা OPকে সতত ধনাত্মক ধরা হয় )।

অতএব, $\sin(-\theta) = \frac{P'N}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta,$

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

$$\tan(-\theta) = \frac{P'N}{ON} = \frac{-PN}{ON} = -\tan\theta.$$

এক্ষণে উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই

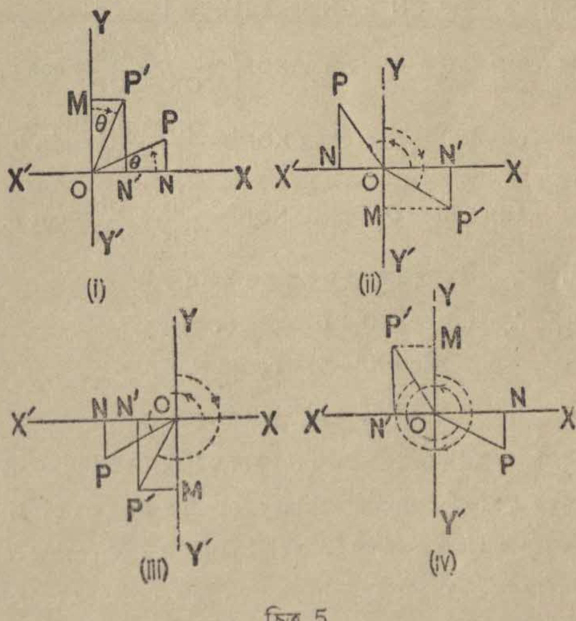
$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta,$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

অন্য চিত্র তিনটিতেও প্রচলিত প্রথা অনুসারে অনুরূপভাবে ঐ একই কোণানুপাত পাওয়া যাইবে।

[ দ্রষ্টব্য : এখানে দেখ চিত্র (1)-এ OP′ চতুর্থ পাদে থাকায় কেবল cos ও উহার অন্যোন্যক sec ধনাত্মক হইয়াছে। ]

6. $\theta$-র যে-কোন মানে $(90^\circ - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP রেখা OX হইতে ধণাত্মক দিকে ( anti-clockwise ) ঘুরিয়া প্রথমে $\angle XOP = \theta$ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OP এর সমান আর একটি সরলরেখা OP′ ঐরূপে ঘুরিয়া OY এর সহিত মিলিত হইয়া




চিত্র 5

90° কোন ( $\angle XOY$ ) উৎপন্ন করিবার পর বিপরীত দিকে ( অর্থাৎ clockwise ) ঘুরিয়া আসিয়া $\angle YOP' = \theta$ উৎপন্ন করিল। ইহাতে $\angle XOP' = 90^\circ - \theta$ হইল।

এখন, XOX′ এর উপর PN ও P′N′ লম্ব টান এবং YOY′ এর উপর P′M লম্ব টান। এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে অঙ্কন অনুসারে ∠XOP ও ∠YOP′ এর পরিমাণ সমান।

$\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON = \angle MOP'$

$$= \angle OP'N' \ (\because \ OM \parallel P'N'),$$

এবং OPN ও OP′N′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

$\therefore$ $ON = P'N'$ ( পরিমাণে ), $PN = ON'$ (পরিমাণে) এবং $OP = OP'$.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে ON ও P′N′ একই চিহ্নযুক্ত ( উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক ) এবং PN ও ON′ একই চিহ্নযুক্ত।

অতএব, $\sin (90^\circ - \theta) = \sin \angle XOP' = \dfrac{P'N'}{OP'} = \dfrac{ON}{OP} = \cos \theta,$

$$\cos (90^\circ - \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{PN}{OP} = \sin \theta,$$

$$\tan (90^\circ - \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{ON}{PN} = \cot \theta.$$

আবার, $\because$ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) = \sec \theta.$$

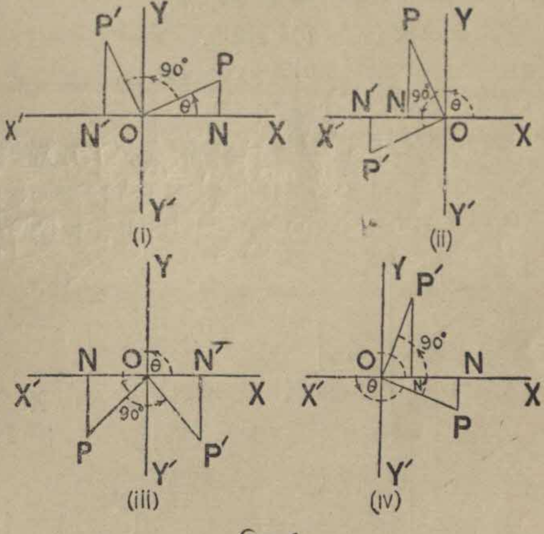
$$\sec (90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta,$$

$$\cot (90^\circ - \theta) = \tan \theta.$$

**দ্রষ্টব্য :** এখানে $(90^\circ - \theta)$ ও $\theta$ কোণ দুইটির সমষ্টি $90^\circ$ বলিয়া উভয়ে পরস্পর পূরক কোণ ( complementary angles )। এখানে জানা গেল যে, দুইটি পরস্পর পূরক কোণের (i) একটির sine অন্যটির cosine-এর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির sine প্রথমটির cosineএর সমান হয়; (ii) একটির tangent অপরটির cotangentএর সমান এবং বিপরীতক্রমে ( vice-versa ) দ্বিতীয়টির tangent প্রথমটির cotangentএর সমান ; এবং (iii) একটির secant অপরটির cosecantএর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির secant প্রথমটির cosecantএর সমান।

7. $\theta$-র যে-কোন মানে $(90^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, ঘূর্ণায়মান OP রেখা ( radius vector ) OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল। তৎপরে উহা একই দিকে আরও এক সমকোণ ঘুরিয়া OP হইতে OP′ অবস্থানে আসিল [ চিত্র 6(1) ], ইহাতে $\angle XOP'=90^\circ+\theta$ হইল। OP ও OP′ সর্ব অবস্থানে সমান ও ধনাত্মক।




চিত্র 6

P ও P′ হইতে XOX′ এর উপর যথাক্রমে PN ও P′N′ লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে POP′ সমকোণ হওয়ায় $\angle PON$ ও $\angle P'ON'$ এর সমষ্টি এক সমকোণ, সুতরাং $\angle PON=90^\circ-\angle P'ON'=\angle OP'N'$. অতএব, PON ও P′ON′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ ON ও P′N′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের এবং PN ও ON′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের সাংখ্যমান সমান।

আবার, প্রত্যেক চিত্রে ON ও P′N′ এর একই চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

এবং PN ও ON′ পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, অর্থাৎ $P'N' = +ON$ এবং $ON' = -PN$.

অতএব, $\sin(90° + \theta) = \sin \angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$,

$$\cos(90° + \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta,$$

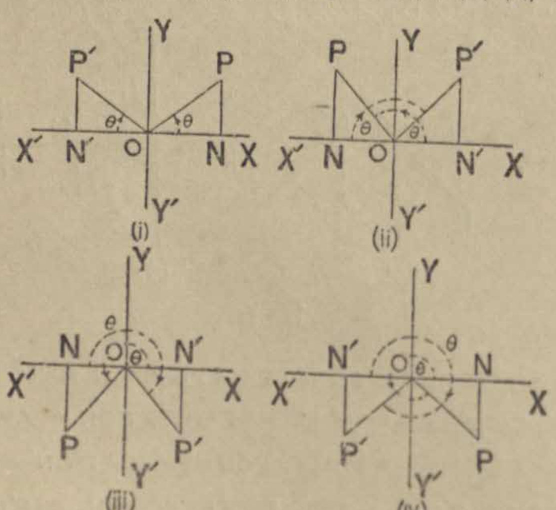
$$\tan(90° + \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{ON}{-PN} = -\cot\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta,$$
$$\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta.$$

8. $\theta$-র যে-কোন মানে $(180° - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP রেখা OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল। আবার মনে কর, OP রেখা




চিত্র 7

OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া OX′ অবস্থানে আসিয়া ( অর্থাৎ

2 সমকোণ বা $180^\circ$ ঘুরিয়া) পুনরায় OX′ হইতে বিপরীত দিকে $\theta$ কোণ ঘুরিয়া OP′ অবস্থানে আসিল। ইহাতে ∠XOP এবং ∠X′OP′ পরিমাণে সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত অর্থাৎ যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইল। অতএব, $\angle XOP' = 180^\circ - \theta$ হইল। OP′কে OP এর সমান করিয়া P ও P′ হইতে XOX′ এর উপর যথাক্রমে PN ও P′N′ লম্বপাত কর।

এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON = \angle P'ON'$ এবং $OP = OP'$, সুতরাং PON ও P′ON′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ প্রত্যেক চিত্রে ON ও ON′ সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং PN ও P′N′ সমান ও একই চিহ্নযুক্ত।

∴ $ON' = -ON$ এবং $P'N' = +PN$ হইবে।

অতএব, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \angle XOP' = \dfrac{P'N'}{OP'} = \dfrac{PN}{OP} = \sin\theta,$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos \angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan \angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{PN}{-ON} = -\tan\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$
$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** $180^\circ - \theta$ ও $\theta$ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক (supplementary), সুতরাং এখানে দুইটি সম্পূরক কোণের কোণানুপাতগুলির সম্বন্ধ পাওয়া গেল এই যে, **সম্পূরক কোণদ্বয়ের** (i) সাইন (sine) দুইটি সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত, (ii) উহাদের কোসাইন (cosine) দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (iii) উহাদের ট্যানজেণ্ট (tangent) দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। ]

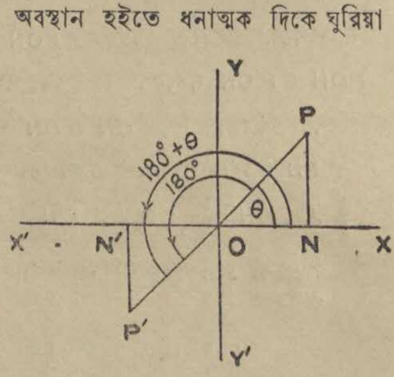
উদাহরণ। $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $\theta$-র যে-কোন মানে $(180^\circ + \theta)$ **কোণের কোণানুপাত।**

মনে কর, OP সরলরেখা OX অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়া OP অবস্থানে আসিল এবং মনে কর, উহা একই দিকে আরও $180^\circ$ ঘুরিয়া OP′ অবস্থানে (অর্থাৎ OPএর সহিত এক সরলরেখায় OPএর বিপরীত দিকে) আসিল। ইহাতে $\angle XOP' = 180^\circ + \theta$ হইল। OP′কে OPএর সমান করিয়া P ও P′ হইতে XX′ এর উপর PN ও P′N′ লম্ব টান।



চিত্র 8

এক্ষণে, ∵ OP = OP′ এবং ∠PON = বিপ্রতীপ ∠P′ON′,

∴ PON ও P′ON′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমান।

∴ $P'N' = -PN$, $ON' = -ON$ এবং $OP = OP'$.

অতএব,

$$\sin(180^\circ + \theta) = \sin\angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = \cos\angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{-PN}{-ON} = \frac{PN}{ON} = \tan\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \quad \begin{aligned} \operatorname{cosec}(180^\circ+\theta) &= -\operatorname{cosec}\theta \\ \sec(180^\circ+\theta) &= -\sec\theta \\ \cot(180^\circ+\theta) &= \cot\theta. \end{aligned}$$

**অন্যরূপে প্রমাণ:** পূর্বে $90^\circ+\theta$ কোণের যে কোণানুপাত নির্ণয় করা হইয়াছে তাহা হইতে $180^\circ+\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(180^\circ+\theta) = \sin(90^\circ+\overline{90^\circ+\theta}) = \cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta.$$

$$\cos(180^\circ+\theta) = \cos(90^\circ+\overline{90^\circ+\theta}) = -\sin(90^\circ+\theta) = -\cos\theta,$$

এবং $\tan(180^\circ+\theta) = \tan(90^\circ+\overline{90^\circ+\theta}) = -\cot(90^\circ+\theta) = \tan\theta,$

ইত্যাদি।

[ **দ্রষ্টব্য:** এখানে কেবল একটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে, উহাতে OP প্রথম পাদে অবস্থিত। OP অন্যান্য পাদে থাকিলে যে তিনটি চিত্র হইবে তাহা অঙ্কন করা সহজ। ]

**উদাহরণ।** $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ+45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ+60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\tfrac{1}{2}.$$

**10. $(270^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।**

পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে এক্ষেত্রেও কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে বিকল্প প্রণালী দেখান হইতেছে:

$$\sin(270^\circ+\theta) = \sin(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta}) = -\sin(90^\circ+\theta) = -\cos\theta,$$

$$\cos(270^\circ+\theta) = \cos(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta}) = -\cos(90^\circ+\theta)$$
$$= -(-\sin\theta) = \sin\theta,$$

$$\tan(270^\circ+\theta) = \frac{\sin(270^\circ+\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cos\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই $\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta) = -\sec\theta,$

$$\sec(270^\circ+\theta) = \operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(270^\circ+\theta) = -\tan\theta.$$

**11. $(360°\pm\theta)$ ও $(n.360°\pm\theta)$ কোণগুলির কোণানুপাত।**

পূর্বে বলা হইয়াছে যে, ত্রিকোণমিতিক কোণ উৎপাদনের সময় ঘূর্ণায়মান রেখা OP ( radius vector ) যে-কোন কোণ $\theta$ উৎপন্ন করিয়া প্রথমে যে অবস্থানে (OP) আসিল, উহা যদি তৎপরে আরও এক বা একাধিক সম্পূর্ণ পাক ( অর্থাৎ যদি 360° বা তাহার কোন গুণিতক $n.360°$ কোণ ) ঘোরে তবে উহা পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে (OPর সহিত) মিলিত হইবে। অতএব, ঐরূপ কোণদ্বয়ের কোণানুপাতগুলি সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, $\sin(360°+\theta)=\sin\theta$

$\cos(360°+\theta)=\cos\theta$

$\tan(360°+\theta)=\tan\theta.$

আবার, $\sin(360°-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(360°-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(360°-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$, ইত্যাদি।

সাধারণ সূত্রাকারে বলা যায় যে, $n$ যদি যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $n.360°\pm\theta$ ( বা $2\pi n\pm\theta$) কোণের কোণানুপাতগুলি $\pm\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলির সমান হইবে।

**12. নিয়ম।** এ পর্যন্ত যে সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গিয়াছে সেগুলি সহজে মনে রাখিবার জন্য একটি নিয়ম করা যাইতে পারে। যথা—

(*a*) $\theta$ **যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন জোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলির আকার **পরিবর্তিত হয় না।** ( অর্থাৎ সাইনটি সাইন, কসটি কস, ইত্যাদি থাকিবে )। উহাদের চিহ্ন ( sign ) নির্ণয়ের জন্য $\theta$কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে ( quadrant ) অবস্থিত তাহা স্থির করিয়া **"All, sin, tan, cos"** নিয়মানুসারে চিহ্নগুলি নির্ণয় করিবে।

(*b*) $\theta$ **যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন বিজোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলি **পরিবর্তিত হয়** ( অর্থাৎ সাইনটি কোসাইন, কোসাইনটি সাইন, ইত্যাদি হইবে )। তাহাদের চিহ্নগুলি নিয়ম (*a*)-এর মত নির্ণয় করিবে।

## উদাহরণমালা 1.

**উদা. 1.** Find the values of (i) $\sin 480°$, (ii) $\cos 405°$, (iii) $\tan(-1485°)$ and (iv) $\cot 1410°$.

(i) এখানে $480° = 5 \times 90° + 30°$,

$\because$ এখানে 90°র গুণিতকটি (5) বিজোড়, $\therefore$ কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে অর্থাৎ sin স্থানে cos হইবে। আবার, 480° কোণটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া sin-এর চিহ্ন ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \sin 480° = \sin(5 \times 90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) $405° = 5 \times 90° - 45°$, এখানে 90°-এর গুণিতক বিজোড় হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইয়া cos-এর স্থানে sin হইবে। আর, 405° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cosটি ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \cos 405° = \cos(5 \times 90° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) $\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$,

$\therefore \tan(-1485°) = -\tan 1485°$

এক্ষণে, $1485° = 16.90° + 45°$, এখানে 90°-এর গুণিতক 16 জোড় সংখ্যা হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না। আর, 1485° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার tan ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \tan(-1485°) = -\tan(1485°) = -\tan(16.90° + 45°)$$
$$= -\tan 45° = -1.$$

(iv) $1410° = 16.90° - 30°$, এখানে 90°-এর গুণিতক জোড় বলিয়া কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না এবং 1410° কোণটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cot ঋণাত্মক হইবে।

$$\therefore \cot 1410° = \cot(16.90° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}.$$

**উদা. 2.** Find the sine, cosine and tangent of the following angles : (a) 180°, (b) 270°, (c) $2\pi$.

(a) $\because \sin(180° - \theta) = \sin\theta$,

$\therefore \sin(180° - 0°) = \sin 0°$ [ $\theta = 0°$ ধরিয়া ]

$\therefore \sin 180° = \sin 0° = 0.$

আবার, $\because \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$,

$\therefore \cos(180^\circ-0^\circ)=-\cos 0^\circ$ [ $\theta=0^\circ$ ধরিয়া ]

$\therefore \cos 180^\circ=-\cos 0^\circ=-1.$

অতএব, $\tan 180^\circ=\dfrac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ}=\dfrac{0}{-1}=0.$

(b) $\because \sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \sin 270^\circ=-\cos 0^\circ$ [ $\theta=0^\circ$ ধরিয়া ]

$=-1.$

অনুরূপে $\cos 270^\circ=\cos(270^\circ+0^\circ)=\sin 0^\circ=0,$

এবং $\tan 270^\circ=\dfrac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ}=\dfrac{-1}{0}=-\infty.$

(c) $2\pi=2\times 180^\circ=360^\circ.$

$\because \sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta,$

$\therefore \sin(360^\circ+0^\circ)=\sin 0^\circ$ [ $\theta=0^\circ$ ধরিয়া ]

$\therefore \sin 2\pi=\sin 360^\circ=\sin 0^\circ=0.$

অনুরূপে $\cos 360^\circ=\cos 0^\circ=1.$

$\therefore \tan 360^\circ=\dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ}=\dfrac{0}{1}=0.$

উদা. 3. Find the smallest positive coterminal angle and the value of cot $\dfrac{17\pi}{4}$.

$\dfrac{17\pi}{4}=4\pi+\dfrac{\pi}{4}=2\times 360^\circ+45^\circ$ [ $\because 2\pi=360^\circ$ ]

$\therefore$ The coterminal angle $=45^\circ$ বা $\dfrac{\pi}{4}$.

আবার, $\cot\dfrac{17\pi}{4}=\cot(2\times 360^\circ+45^\circ)=\cot 45^\circ=1.$

উদা. 4. Find the value of

$3\cos 270^\circ \sec 180^\circ+2\,\text{cosec}\,90^\circ-\cos 360^\circ.$

প্রদত্ত রাশি $=3\times\sin 0^\circ\times\dfrac{1}{-\cos 0^\circ}+2\times\text{cosec}\,90^\circ-\cos 0^\circ$

$=3\times 0\times\dfrac{1}{-1}+2\times 1-1=0+2-1=1.$

উদা. 5. Find all the angles numerically less than 360° which satisfy the equation $\sin A = -\frac{1}{2}$.

$$\because \quad \tfrac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$
$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2} = -\sin 30^\circ\,;$$

অতএব, 360° অপেক্ষা ছোট যে সকল কোণের sine = − sin 30°, সেই কোণগুলিই Aএর মান হইবে।

এক্ষণে $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ \cdots\cdots(1)$.

আবার, $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$,

বা, $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$

$\therefore \quad \sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\sin 30^\circ \cdots\cdots(2)$.

আবার, $\sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$

বা, $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ \cdots\cdots(3)$.

আবার, $\sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$,

বা, $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ \cdots\cdots(4)$.

$\therefore \quad A = -30^\circ, -150^\circ, 210^\circ$ ও $330^\circ$.

উদা. 6. Prove that

$$\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \sin(-330^\circ) = 1.$$

বামপক্ষ $= \sin(360^\circ + 60^\circ) \cos(360^\circ + 30^\circ)$

$$+ \cos(-360^\circ + 60^\circ) \sin(-360^\circ + 30^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

উদা. 7. Express the following in terms of the ratios of a positive angle less than 45°:

(i) $\tan(-1385^\circ)$ and (ii) $\cos 294^\circ$.

এক্ষণে, (i) $\tan(-1385^\circ) = \tan(-4 \times 360^\circ + 55^\circ) = \tan 55^\circ$
$= \tan(90^\circ - 35^\circ) = \cot 35^\circ$.

(ii) $\cos 294^\circ = \cos(3 \times 90^\circ + 24^\circ) = \sin 24^\circ$.

উদা. 8. Find the simplest value of $\dfrac{\cos 255^\circ + \tan 285^\circ}{\cot 165^\circ - \sin 375^\circ}$.

$$\frac{\cos 255^\circ + \tan 285^\circ}{\cot 165^\circ - \sin 375^\circ} = \frac{\cos(270^\circ - 15^\circ) + \tan(270^\circ + 15^\circ)}{\cot(180^\circ - 15^\circ) - \sin(360^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{-\sin 15^\circ - \cot 15^\circ}{-\cot 15^\circ - \sin 15^\circ} = 1.$$

উদা. 9. If $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, find $\sin\theta$ and $\cos\theta$.

এখানে $\tan\theta$-র মান ঋণাত্মক হওয়ায় $\theta$-র সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত। [ চিত্র আঁকিয়া লও ]

দ্বিতীয় পাদে ভূমি ON ঋণাত্মক এবং লম্ব PN ধনাত্মক

$\therefore\ ON = -5$ এবং $PN = 12$

$\therefore\ OP = \sqrt{PN^2 + ON^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13.$

অতএব, $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{12}{13}$ এবং $\cos\theta = \dfrac{ON}{OP} = -\dfrac{5}{13}$.

আবার, চতুর্থ পাদে ভূমি $ON'$ ধনাত্মক এবং লম্ব $P'N'$ ঋণাত্মক।

$\therefore\ ON' = 5$ এবং $P'N' = -12$ এবং লম্ব $OP' = OP = 13$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{P'N'}{OP} = -\dfrac{12}{13}$ এবং $\cos\theta = \dfrac{ON'}{OP'} = \dfrac{5}{13}$.

অতএব, $\sin\theta = \pm\dfrac{12}{13}$ এবং $\cos\theta = \pm\dfrac{5}{13}$.

উদা. 10. Prove that $\cos^2\dfrac{\pi}{4} + \sin^2\dfrac{3\pi}{4} + \sin^2\dfrac{5\pi}{4} + \sin^2\dfrac{7\pi}{4} = 2.$

$$\text{বামপক্ষ} = \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+3\sin^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

**উদা. 11.** If $\tan\theta=\frac{5}{12}$ and $\cos\theta$ is negative, find the value of $\frac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$.

$\because\ \tan\theta=\frac{5}{12},\ \therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144}$

$\therefore\ \sec\theta=\pm\frac{13}{12}$. এখানে $\because\ \cos\theta$ ঋণাত্মক ( স্বীকার )

$\therefore\ \sec\theta=-\frac{13}{12}.\ \ \therefore\ \cos\theta=-\frac{12}{13}$.

অতএব, $\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\frac{5}{12}\times-\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}}{-\frac{13}{12}+\frac{5}{12}}=\frac{51}{26}$.

**উদা. 12.** Solve for $\theta$, giving all the possible values, when $0°<\theta<360°$ : $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$. [ C. U. 1936 ]

$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2,$

বা, $\cos\theta-2=-\sqrt{3}\sin\theta,$

বা, $\cos^2\theta-4\cos\theta+4=3\sin^2\theta=3(1-\cos^2\theta),$

বা, $4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0,$

বা, $(2\cos\theta-1)^2=0$, বা, $2\cos\theta-1=0,$

বা, $2\cos\theta=1,\ \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60°,\ \therefore\ \theta=60°.$

এখানে $\cos\ \theta$ ধনাত্মক বলিয়া কোণটি প্রথম অথবা চতুর্থ পাদে থাকিতে পারে। $\theta$ ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ নহে বলিয়া চতুর্থ পাদে থাকিবে না। চতুর্থ পাদে $\cos\theta=\cos(360°-\theta)=\cos(360°-60°)=\cos 300°$, সুতরাং $\theta=300°$ হইতে পারে, কিন্তু এই মানে প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অতএব, এখানে $\theta$-র একমাত্র মান $60°$ হইল। $300°$ এখানে একটি অবান্তর বীজ।

**উদা. 13.** Find the value of $\theta$, lying between 0° and 360° satisfying the equation $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$.

$3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5,$

বা, $3(1+\tan^2\theta+\tan^2\theta)=5$, বা, $3+6\tan^2\theta=5$,

বা, $6\tan^2\theta=2$, বা, $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$, $\therefore \tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

এক্ষণে, যদি $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ধনাত্মক বলিয়া $\theta$ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°=\tan(180°+30°)$

$\therefore \theta=30°$ বা $210°$.

আবার, যদি $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া $\theta$ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan 30°=\tan(180°-30°)$,

অথবা $=\tan(360°-30°)$

$\therefore \theta=180°-30°$, অথবা, $360°-30°$.

$\therefore \theta=150°$ বা $330°$.

$\therefore$ $\theta$-র নির্ণেয় মান 30°, 150°, 210°; 330° হইতে পারে।

**উদা. 14.** Evaluate $\sin\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\}$, where $n$ is any integer.

এখানে $n$ কোন জোড় বা বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা।

(1) যদি $n$ জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর, $n=2p$ ( $p$ যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা ).

$$\therefore \sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{2p\pi+(-1)^{2p}\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left(2p\pi+\frac{\pi}{6}\right) \qquad [\,2p \text{ জোড় বলিয়া } (-1)^{2p}=1\,]$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

(ii) যদি $n$ বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর $n=2p+1$ ( $p$ যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা )।

$$\therefore \quad \sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{(2p+1)\pi+(-1)^{2p+1}\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left\{(2p+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left\{2p\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** $2p+1$ বিজোড় বলিয়া এখানে $(-1)^{2p+1}=-1$ ]

**উদা. 15.** If ABCD is a cyclic quadrilateral, show that $\tan A+\tan B+\tan C \tan D=0$.

$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি = দুই সমকোণ বা $180°$,

$\therefore$ $A+C=180°$, বা $A=180°-C$,

এবং $B+D=180°$, বা $B=180°-D$.

এক্ষণে, $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$=\tan(180°-C)+\tan(180°-D)+\tan C+\tan D$

$=-\tan C-\tan D+\tan C+\tan D=0.$

## Exercise 1

Find the smallest positive co-terminal angle and the value of the expression :—

1. $\cos 420°$ 2. $\tan(-315°)$ 3. $\sec\frac{25\pi}{6}$.

Find the value of :—

4. $\cot 585°$ 5. $\sin(-1215°)$ 6. $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

**7.** $\sin 960°$ **8.** $\tan 675°$ **9.** $\sec(-1575°)$

**10.** $\operatorname{cosec}(-1470°)$ **11.** $\tan 1200°$

**12.** $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ **13.** $\sin(-1125°)+\cos(-1125°)$

**14.** $\dfrac{\cot 315° - \cos(-240°)}{\cot 990° + \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)}$

Prove that :—

**15.** $\cos(A-270°) = -\sin A.$

**16.** $\sin(780°)\cos(390°) - \sin(330°)\cos(-300°) = 1.$

**17.** $\cos(n\pi+\theta) = (-1)^n \cos\theta.$

**18.** $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta} = 1.$

**19.** If $\sec\frac{2\pi}{3} = -2$, find $\sin\frac{2\pi}{3}$.

**20.** If $\cot\theta = -\frac{8}{15}$, find $\sin\theta$.

**21.** If $n$ be an even integer, evaluate $\sin\theta + \sin(\pi+\theta) + \sin(2\pi+\theta) + \cdots$ to $n$ terms.

Express in terms of ratios of positive angles less than 45° :—

**22.** $\tan 142°$ **23.** $\cos(-930°)$ **24.** $\sin\frac{17\pi}{9}$.

**25.** Find all the angles numerically less than 360° which satisfy the equation $\tan\theta = -\sqrt{3}$.

**26.** What values between 0° and 360° may $\theta$ have if $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ?

Solve for $\theta$, giving all possible values, when $0° < \theta < 360°$ :—

**27.** $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$. **28.** $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

29. $2\sin^2\theta+\cos\theta=2$   30. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2.$

31. $2(\sec^2\theta+\sin^2\theta)=5.$

32. If $n$ is any integer, find the values of :—

(i) $\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$   (ii) $\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$

(iii) $\tan\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$

33. Find the values of A when,

(i) $\sin A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ and A lies between 180° and 270°.

(ii) $\tan A=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ and A lies between 270° and 360°.

(iii) $\sec A=\sqrt{2}$ and $360°<A<450°$.

34. An angle $\theta$ lies between 270° and 360° and $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, find $\sec\theta$.

35. If $\cot\theta=\frac{3}{4}$ and $\sin\theta$ is negative, find the value of

$$\frac{\cot(-\theta)+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta+\sin(-\theta)}.$$

36. Simplify and evaluate, when $\theta=240°$

(i) $\frac{\sin(\pi-\theta)}{\tan(\pi+\theta)}\cdot\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\sin(-\theta)}.$

(ii) $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$

37. ABCD is a quadrilateral ; prove that

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)+\tan\tfrac{1}{2}(C+D)=0.$$

38. If ABC be a triangle, find the value of

$$\frac{\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-C\right)+\sin(2\pi-A)+\sin(\pi+B)}.$$

## Compound Angles

### ( Addition and Subtraction Formulas )

### 13. মিশ্র কোণ ( Compound Angle )

দুই বা তদধিক কোণের সমষ্টি বা অন্তরফলকে একটি মিশ্র কোণ (Compound Angle ) বলে।

যথা, $A+B$ কোণ, $A-B$ কোণ, $A+B+C$ কোণ ইত্যাদি। মিশ্র কোণ সম্বন্ধে উপপাদ্যগুলি দেখ।

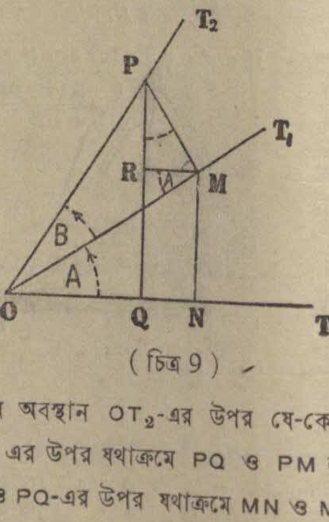
**14. উপপাদ্য 1.** A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A+B<90°$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং (2) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

(1) মনে কর, ঘূর্ণায়মান OT সরলরেখা প্রথম অবস্থান OT হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান $TOT_1$ কোণ উৎপন্ন করিল। পরে উহা একই দিকে আরও ঘুরিয়া B কোণের সমান $T_1OT_2$ কোণ উৎপন্ন করিল।

অতএব, $\angle TOT_2=A+B$ হইল।




( চিত্র 9 )

**অঙ্কন :** ঘূর্ণায়মান রেখাটির শেষ অবস্থান $OT_2$-এর উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে OT ও $OT_1$ এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার M বিন্দু হইতে OT ও PQ-এর উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

**প্রমাণ :** $\because$ MR ও TQ একই সরলরেখা PQ-এর উপর লম্ব,

$\therefore$ MR ∥ TO, $\therefore$ $\angle OMR=$ একান্তর $\angle MON=A$.

আবার, $\angle OMR + \angle PMR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle RPM$

$\therefore \quad \angle MPR = \angle OMR = A.$

এক্ষণে সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই,

$$\sin(A+B) = \sin \angle POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{RQ+PR}{OP}$$

$$= \frac{MN+PR}{OP} \quad [\because \; RQ = MN]$$

$$= \frac{MN}{OP} + \frac{PR}{OP} = \frac{MN}{OM}.\frac{OM}{OP} + \frac{PR}{PM}.\frac{PM}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

(2) [ প্রথমে (1)এর অঙ্কন পর্যন্ত লিখিবে ]

**প্রমাণ ঃ** একই সরলরেখা PQ এর উপর লম্ব বলিয়া RM ∥ QN.

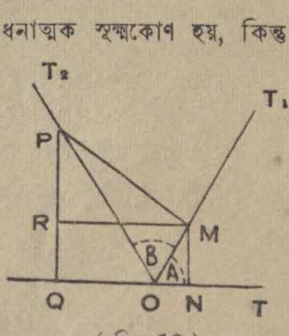
অনুরূপে RQ ∥ MN. এক্ষণে $\cos(A+B) = \cos \angle POQ = \frac{OQ}{OP} = \frac{ON-QN}{OP}$

$$= \frac{ON-MR}{OP} \quad [\because \; \text{MNQR আয়তের } MR = QN]$$

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{MR}{OP} = \frac{ON}{OM}.\frac{OM}{OP} - \frac{MR}{PM}.\frac{PM}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

**দ্রষ্টব্য ঃ** যদি উপপাদ্যটিতে A ও B দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, কিন্তু উভয়ের সমষ্টি 90° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হয়, তবে চিত্রটি কিরূপ হইবে তাহা নিম্নে দেখান হইল।



( চিত্র 10 )

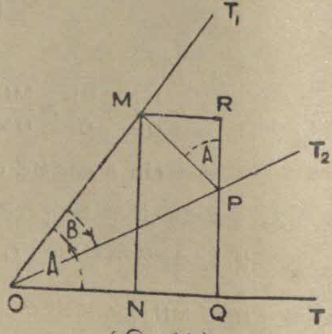
এই দুইস্থলে A ও B কোণদ্বয়কে সূক্ষ্ম-কোণ ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র আঁকিলে উপরের প্রমাণ সিদ্ধ হইবে, ( কেবল সংশ্লিষ্ট রেখা-গুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলি ঠিকমত লইতে হইবে )।

**15. উপপাদ্য 2.** A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A > B$ হইতে প্রমাণ কর যে,

(1) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$,

এবং (2) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

(1) মনে কর, ঘূর্ণায়মান OT সরলরেখা প্রথম অবস্থান OT হইতে ধনাত্মক দিকে A কোণের সমান $TOT_1$ কোণ উৎপন্ন করিল এবং তৎপরে বিপরীত দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান $T_1OT_2$ কোণ উৎপন্ন করিল। অতএব, $\angle TOT_2 = A - B$ হইল।




( চিত্র 11 )

**অঙ্কন :** ঘূর্ণায়মান রেখাটির শেষ অবস্থান $OT_2$ রেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া উহা হইতে OT ও $OT_1$ এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার, M বিন্দু হইতে OT ও বর্ধিত QP-র উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

**প্রমাণ :** $\because$ OQ এবং MR একই সরলরেখা RQ এর উপর লম্ব,

$\therefore$ $MR \parallel OQ$,

$\therefore$ $\angle T_1MR =$ অনুরূপ $\angle MON = A$,

আবার, $\angle MPR + \angle PMR = 1$ সমকোণ $= \angle PMR + \angle T_1MR$

$\therefore$ $\angle MPR = \angle T_1MR = A$.

এক্ষণে, সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই

$$\sin(A-B) = \sin \angle POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{RQ - PR}{OP}$$

$$= \frac{MN - PR}{OP} \quad [\because RQ = MN]$$

$$= \frac{MN}{OP} - \frac{PR}{OP} = \frac{MN}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} - \frac{PR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

(2) [ প্রথমে (1)এর অঙ্কন পর্যন্ত লিখিবে ]

**প্রমাণ ঃ** PQ উপর MR ও NQ লম্ব বলিয়া MR ∥ NQ.

অনুরূপে MN ∥ RQ. এক্ষণে $\cos(A-B)=\cos\angle POQ=\frac{OQ}{OP}=\frac{ON+NQ}{OP}$

$$=\frac{ON+MR}{OP}\quad [\because \text{MNQR আয়তের } NQ=MR]=\frac{ON}{OP}+\frac{MR}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP}+\frac{MR}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

**দ্রষ্টব্য ঃ** উপরের উপপাদ্যে A ও B সূক্ষ্মকোণ, A+B এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং A−B ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন পরিমাণের কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র আঁকিয়া উপরের প্রণালীতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় ( সংশ্লিষ্ট রেখাগুলিকে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নসহ লইতে হইবে )।

কোন চিত্র না আঁকিয়া উপরে প্রমাণিত সূত্রগুলির সাহায্যে নিম্নের প্রণালীতেও প্রমাণ করা যায় যে উপপাদ্যগুলি যে-কোন পরিমাণ কোণের পক্ষেও সত্য।

মনে কর, $X=90°+A$, সুতরাং $\sin X=\sin(90°+A)=\cos A$ এবং $\cos X=\cos(90°+A)=-\sin A$.

$$\therefore\ \sin(X+B)=\sin\{(90°+A)+B\}=\sin\{90°+(A+B)\}$$
$$=\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\sin X\cos B+\cos X\sin B.$$

আবার, $\cos(X+B)=\cos\{90°+(A+B)\}=-\sin(A+B)$
$$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$
$$=\cos X\cos B-\sin X\sin B.$$

অনুরূপে $X=90°+B$ লিখিয়াও ঐ সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়। আবার, $X_1=90°+X$ লিখিয়াও ঐ সূত্রদ্বয় প্রমাণ করা যায়।

আবার, মনে কর $X=-A$

$$\therefore\ \sin(X+B)=\sin(-A+B)=\sin\{-(A-B)\}=-\sin(A-B)$$
$$=-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=-\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$=\sin(-A)\cos B+\cos(-A)\sin B$$
$$=\sin X\cos B+\cos X\sin B.$$

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে, উপপাদ্য-2 এর সূত্রগুলিও যে-কোন পরিমাণ কোণের পক্ষে সত্য।

অতএব, ঐ উপপাদ্যগুলি সর্বক্ষেত্রে সত্য। উহাদিগকে Addition Theorems বা Subtraction Theorems বলা হয়।

## 16. কতিপয় অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণ।

**অনু. সি. 1.** Prove that $\boldsymbol{\sin}(A+B)\,\boldsymbol{\sin}(A-B)$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B\cdots\cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A\cdots\cdots(ii).$$

**প্রমাণঃ** $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B\cdots\cdots(i)$$
$$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A\cdots\cdots(ii).$$

**অনু. সি. 2.** Prove that $\boldsymbol{\cos}(A+B)\,\boldsymbol{\cos}(A-B)$
$$=\cos^2 A-\sin^2 B\cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\sin^2 A\cdots(ii).$$

প্রমাণ : $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$

$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$

$=\cos^2A-\sin^2B\cdots\cdots(i)$

$=(1-\sin^2A)-(1-\cos^2B)$

$=1-\sin^2A-1+\cos^2B=\cos^2B-\sin^2A.\cdots\cdots(ii).$

অনু. সি. 3. Show that (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

প্রমাণ : (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

ডান পক্ষের লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\tan(A-B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

অনু. সি. 4. Prove that (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$,

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$.

**প্রমাণ :** (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে $\sin A \sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\cot(A+B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে $\sin A \sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\cot(A-B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

**অনু. সি. 5.** Find the expansion of

(i) **sin** $(A+B+C)$

(ii) **cos** $(A+B+C)$

(iii) **tan** $(A+B+C)$.

**প্রমাণ :** (i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$

$\quad+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$

$\quad+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$

[ **দ্রষ্টব্য :** $\sin(A+B+C)$-কে সহজভাবে,

$\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$

এই আকারে লেখা যায়। ]

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$$
$$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$$
$$-\sin A\sin C\cos B-\sin B\sin C\cos A.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিকে ( expansionকে ) $\cos A\cos B\cos C\,(1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C)$ এই আকারে লেখা যায় । ]

(iii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B}}{\dfrac{1-\tan A\tan B-(\tan A+\tan B)\tan C}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** (1) এই সূত্রটি স্মরণ রাখিবে। $\tan(A+B+C)=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$ এইরূপ লিখিয়া তৎপরে $\sin(A+B+C)$ ও $\cos(A+B+C)$-এর expansion দুইটি লিখিবে। তৎপরে লব ও হরকে $\cos A\cos B\cos C$ দিয়া ভাগ করিলেই $\tan(A+B+C)$-এর উপরের expansionটি পাওয়া যাইবে।

(2) উপরের প্রদর্শিত প্রণালীতে 4, 5 বা তদধিক সংখ্যক কোণের সমষ্টির ত্রিকোণমিতিক বিস্তৃতিগুলির ( functions বা expansions এর) সূত্র পাওয়া যায়। ]

## উদাহরণমালা 2

**উদা. 1.** Find the value of sin 75°, cos 75°, and tan 75°.

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 75° = \tan(45°+30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

**উদা. 2.** Find the value of tan 15°.

$$\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

উদা. 3. Find the value of $\sin(A-B)$, when $\sin A=\frac{3}{5}$ and $\sin B=\frac{5}{13}$.

$\because \sin A=\frac{3}{5}$, $\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}$
$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\because \sin B=\frac{5}{13}$, $\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}$
$=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

এক্ষণে, $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$
$=\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65}$.

[দ্রষ্টব্য: প্রকৃত পক্ষে $\cos A=\pm\frac{4}{5}$ এবং $\cos B=\pm\frac{12}{13}$ হয়; কিন্তু আমরা এরূপ ক্ষেত্রে ধনাত্মক বর্গমূলটিই লইয়া থাকি।]

উদা. 4. Prove that $\tan(45°+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$.

$$\tan(45°+A)=\frac{\tan 45°+\tan A}{1-\tan 45°\tan A}$$
$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}\ [\because \tan 45°=1]$$

উদা. 5 Prove that $\tan(A+B)\tan(A-B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$.
[C. U. '44]

প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}\cdot\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$
$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$ [অনু. সি. 1 ও 2 দেখ]

উদা. 6. Shew that $\frac{\cos 6°+\sin 6°}{\cos 6°-\sin 6°}=\tan 51°$

$\cos 6°+\sin 6°=\cos(51°-45°)+\sin(51°-45°)$
$=\cos 51°.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin 51°.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin 51°.\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos 51°.\frac{1}{\sqrt{2}}$
$=2\sin 51°.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin 51°$,

$$\cos 6° - \sin 6° = \cos (51° - 45°) - \sin (51° - 45°)$$
$$= 2 \cos 51° . \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos 51°.$$

$$\therefore \quad \frac{\cos 6° + \sin 6°}{\cos 6° - \sin 6°} = \frac{\sqrt{2} \sin 51°}{\sqrt{2} \cos 51°} = \tan 51°.$$

উদা. 7. Prove that $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$.

$$\cot A - \cot 2A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$
$$= \frac{\sin 2A \cos A - \sin A \cos 2A}{\sin A \sin 2A} = \frac{\sin (2A - A)}{\sin A \sin 2A}$$
$$= \frac{\sin A}{\sin A \sin 2A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

উদা. 8. Prove the identity

$$\cos^2 A + \cos^2 \left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$ [C. U. '33]

বামপক্ষ $= \cos^2 A + \{\cos (A + 60°)\}^2 + \{\cos (A - 60°)\}^2$

$$= \cos^2 A + (\cos A \cos 60° - \sin A \sin 60°)^2$$
$$+ (\cos A \cos 60° + \sin A \sin 60°)^2$$
$$= \cos^2 A + (\tfrac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A)^2 + (\tfrac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A)^2$$
$$= \cos^2 A + 2(\tfrac{1}{4} \cos^2 A + \tfrac{3}{4} \sin^2 A)$$
$$= \cos^2 A + \tfrac{1}{2} \cos^2 A + \tfrac{3}{2} \sin^2 A = \tfrac{3}{2} \cos^2 A + \tfrac{3}{2} \sin^2 A$$
$$= \tfrac{3}{2}(\cos^2 A + \sin^2 A) = \tfrac{3}{2} \times 1 = \tfrac{3}{2}.$$

উদা. 9. Prove that $\tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1$.

$$\because \quad \frac{\tan 10° + \tan 35°}{1 - \tan 10° \tan 35°} = \tan (10° + 35°) = \tan 45° = 1,$$

$$\therefore \quad \tan 10° + \tan 35° = 1 - \tan 10° \tan 35°,$$

$$\therefore \quad \tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1.$$

উদা. 10. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$, show that $\cot A.\cot B.\cot C=\cot D$. [ C. U. '30 ]

$\because\ \cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$,

$\therefore\ \dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin(C-D)}{\sin(C+D)}$,

*Or,* $\dfrac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{\cos(A+B)-\cos(A-B)}=\dfrac{\sin(C-D)+\sin(C+D)}{\sin(C-D)-\sin(C+D)}$

[ By Comp. & Div. ]

*Or,* $\dfrac{2\cos A\cos B}{-2\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin C\cos D}{-2\cos C\sin D}$,

*Or,* $\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin C\cos D}{\cos C\sin D}$,

*Or,* $\cot A\cot B=\tan C\cot D=\dfrac{\cot D}{\cot C}\left[\because \tan C=\dfrac{1}{\cot C}\right]$

$\therefore\ \cot A\cot B\cot C=\cot D$.

উদা. 11. If $\sin(A+B)=n\sin(A-B)$ and if $n\neq-1$, shew that $\cot A=\dfrac{n-1}{n+1}\cot B$.

$\because\ \sin(A+B)=n\sin(A-B)$,

$\therefore\ \sin A\cos B+\cos A\sin B=n(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$,

*Or,* $\cos A\sin B+n\cos A\sin B$

$=n\sin A\cos B-\sin A\cos B$ [ পক্ষান্তর করিয়া ]

*Or,* $\cos A\sin B(1+n)=\sin A\cos B(n-1)$,

*Or,* $\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}=\dfrac{n-1}{n+1}$, *or,* $\cot A\tan B=\dfrac{n-1}{n+1}$,

*Or,* $\cot A\times\dfrac{1}{\cot B}=\dfrac{n-1}{n+1}$, $\therefore\ \cot A=\dfrac{n-1}{n+1}\cot B$.

উদা. 12. Show that if an angle $\alpha$ be divided into two parts so that the ratio of the tangents of the parts is $\lambda$, the difference $x$ between the parts is given by the equation $\sin x=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha$. [A. U. '45]

মনে কর, $\alpha$ কোণের অংশদ্বয় $m$ ও $n$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{\tan m}{\tan n}=\lambda$.........(1),

$m-n=x$......(2), এবং $m+n=\alpha$......(3).

এক্ষণে, $$\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha=\frac{\frac{\tan m}{\tan n}-1}{\frac{\tan m}{\tan n}+1}\cdot\sin\alpha=\frac{\tan m-\tan n}{\tan m+\tan n}\sin\alpha$$

$$=\frac{\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\sin n}{\cos n}}{\frac{\sin m}{\cos m}+\frac{\sin n}{\cos n}}.\sin(m+n)[\because \alpha=m+n]$$

$$=\frac{\sin m\cos n-\cos m\sin n}{\sin m\cos n+\cos m\sin n}.\sin(m+n)$$

$$=\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}.\sin(m+n)=\sin(m-n)$$

$$=\sin x.$$

উদা. 13. If $A+B=C$, prove that

$$\cos^2A+\cos^2B-2\cos A\cos B\cos C=\sin^2C.$$

বামপক্ষ $=\cos^2A+\cos^2B-2\cos A\cos B\cos(A+B)$

$[\because C=A+B]$

$=\cos^2A+\cos^2B-2\cos A\cos B\times$

$(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=\cos^2A+\cos^2B-2\cos^2A\cos^2B$

$+2\cos A\cos B\sin A\sin B$

$$=\cos^2 A-\cos^2 A\cos^2 B+\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B$$
$$+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$
$$=\cos^2 A(1-\cos^2 B)+\cos^2 B(1-\cos^2 A)$$
$$+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$
$$=\cos^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A$$
$$+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$
$$=(\cos A\sin B+\cos B\sin A)^2=\{\sin(A+B)\}^2=\sin^2 C.$$

## Exercise 2

1. Find the value of (i) $\sin(-15^\circ)$, (ii) $\cot 15^\circ$, (iii) $\tan(-75^\circ)$.
2. Find the expansion of $\sin(A-B+C)$.
3. Find the value of $\sin 105^\circ+\cos 105^\circ+\cos\frac{\pi}{4}$.
4. If $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$, find the value of $\cos(A+B)$.
5. If $\sin B=\frac{4}{5}$ and $\cos A=\frac{8}{17}$, find the value of $\sec(A+B)$.
6. If $\tan A=\frac{2}{11}$ and $\cot B=\frac{24}{7}$, find $\cot(A-B)$.

Prove the following identities :—

7. $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$.
8. $\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=\cot B-\cot A$.
9. $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0$ [ C. U. '53 ]
10. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ $-\sin(\theta+\alpha)$.
11. $2\cos(45^\circ+A)\cos(45^\circ-A)=\cos^2 A-\sin^2 A$.
12. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$.

13. $\dfrac{\tan(2\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(2\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan 2\alpha.$

14. $\cos^2 A+\cos^2(120°-A)+\cos^2(120°+A)=\frac{3}{2}.$

15. $\cos 69°22' \cos 9°22'+\cos 80°38' \cos 20°38'=\frac{1}{2}.$

16. $\cos 38°15' \sin 68°15'-\cos 51°45' \sin 21°45'=\frac{1}{2}.$

17. $\sin 3\theta \cos\theta-\cos 3\theta \sin\theta=\sin 2\theta.$

18. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$ [C. U. '47]

19. $1+\dfrac{\tan 2A}{\cot A}=\sec 2A.$   20. $\dfrac{\cos 9°+\sin 9°}{\cos 9°-\sin 9°}=\tan 54°.$

21. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{1-\sin^2 A-\sin^2 B}.$

22. $\sin(m+1)\theta.\sin(m-1)\theta+\cos(m+1)\theta\cos(m-1)\theta$
$=\cos 2\theta.$

23. $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin\theta.\sin\frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos\theta.\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta).$

24. $\tan^2 A-\tan^2 B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}.$ [C. U. '36]

25. $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$ [C. U. '44]

26. $\tan 27°+\tan 18°+\tan 18°\tan 27°=1.$

Simplify :—

27. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}.$

28. $1+\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}.$

29. If $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0,$
show that $1+\cot\alpha\tan\beta=0.$ [C. U. '39]

30. If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B \cos C$, show that $\tan A=\tan B+\tan C$. [C. U. '42]

31. If $\tan \beta=\dfrac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1-n \sin^2 \alpha}$, show that

$\tan (\alpha-\beta)=(1-n) \tan \alpha$. [P. U. '50]

32. If A, B, C be the angles of a triangle, show that $\sin^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B+2 \cos A \cos B \cos C$. [C. U. '30]

33. Prove geometrically the formula

$\cos (A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$ where A is an obtuse angle and B is acute. [C. U. '41]

## Transformation of Products and Sums

গুণফলকে যোগফল অথবা বিয়োগফলের আকারে প্রকাশ করিয়া রূপান্তর করা যায়। আবার, যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফলের আকারে প্রকাশ করা যায়।

**17. Transformation of products into sums or differences (গুণফলকে যোগফল বা অন্তরফলের আকারে রূপান্তর)।**

(1) পূর্বে প্রমাণিত 14 ও 15 অনুচ্ছেদ হইতে পাই

$\sin A \cos B+\cos A \sin B=\sin (A+B) \cdots$(i)

$\sin A \cos B-\cos A \sin B=\sin (A-B) \cdots$(ii)

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $2 \sin A \cos B=\sin (A+B)+\sin (A-B)$

আবার, (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই

$2 \cos A \sin B=\sin (A+B)-\sin (A-B)$.

উপরের সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে আমরা একটি sine ও একটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি sines-এর সমষ্টি বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ করিতে পারি।

(2) পূর্বে প্রমাণিত 14 ও 15 অনুচ্ছেদ হইতে পাই

$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B) \cdots$(iii)

$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B) \cdots$(iv)

∴ ( যোগ করিয়া ) $2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$.

আবার, (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$.

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে (i) দুইটি cosines-এর গুণফলকে দুইটি cosines-এর যোগফলরূপে এবং (ii) দুইটি sines-এর গুণফলকে দুইটি cosines-এর অন্তরফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র চারিটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। নিম্নে ঐগুলি একত্রে দেওয়া হইল,

$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \cdots$(1)

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \cdots$(2)

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \cdots$(3)

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \cdots$(4)

[ **দ্রষ্টব্য** : মনে রাখিবার সুবিধার জন্য মুখে মুখে বলা হয়।

$2 \sin A \cos B = \sin (\text{sum}) + \sin (\text{difference})$

$2 \cos A \sin B = \sin (\text{sum}) - \sin (\text{difference})$

$2 \cos A \cos B = \cos (\text{sum}) + \cos (\text{difference})$

$2 \sin A \sin B = \cos (\text{difference}) - \cos (\text{sum})$

লক্ষ্য করিবে শেষের সূত্রটিতে প্রথমটি difference এবং পরেরটি sum.]

**উদাহরণ 1.** $2 \sin 11A \cos 5A$

$$= \sin (11A+5A) + \sin (11A-5A)$$
$$= \sin 16A + \sin 6A.$$

**উদাহরণ 2.** $2 \cos 5\theta \sin 8\theta = \sin (5\theta+8\theta) - \sin (5\theta-8\theta)$

$$= \sin 13\theta - \sin (-3\theta)$$
$$= \sin 13\theta + \sin 3\theta.$$

উদাহরণ 3. $2\cos 75^\circ \cos 15^\circ$

$$=\cos(75^\circ+15^\circ)+\cos(75^\circ-15^\circ)$$
$$=\cos 90^\circ+\cos 60^\circ=0+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

উদাহরণ 4. $2\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}$

$$=\left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}-\frac{7\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{7\theta}{2}\right)\right]$$
$$=\{\cos(-\theta)-\cos 6\theta\}=\cos\theta-\cos 6\theta.$$

## 18. Transformation of sums or differences into products (যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফল আকারে প্রকাশ)

$\because\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \cdots(1)$

এক্ষণে, মনে কর $A+B=C$, এবং $A-B=D$;

সুতরাং, $A=\frac{C+D}{2}$, এবং $B=\frac{C-D}{2}$.

অতএব, (1) হইতে পাই $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots(1)$

আবার, $\because\ \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots\cdots(2)$,

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\cdots\cdots(3)$,

এবং $\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$=-\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$
$$=-2\sin A\sin B$$
$$=2\sin A\sin(-B)\cdots\cdots(4).$$

$\therefore$ (2), (3) ও (4)-এ A ও B এর মান বসাইয়া পাই

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(\text{II})$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(III).$$

এবং $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots\cdots(IV).$

উপরের সূত্র চারিটিও বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি নিম্নে একত্রে দেওয়া হইল :—

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots(I)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots(II)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(III)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots(IV)$$

[ দ্রষ্টব্য : শেষ সূত্রটিতে লক্ষ্য কর যে, $\frac{C-D}{2}$ না হইয়া $\frac{D-C}{2}$ হইয়াছে।

মনে রাখিবার সুবিধার জন্য বলা যায় :—

(i) Sum of two sines $=2\sin(\frac{1}{2}\text{ sum})\cos(\frac{1}{2}\text{ diff.})$

(ii) difference of two sines $=2\cos(\frac{1}{2}\text{ sum})\sin(\frac{1}{2}\text{ diff.})$

(iii) sum of two consines $=2\cos(\frac{1}{2}\text{ sum})\cos(\frac{1}{2}\text{ diff.})$

(iv) difference of two cosines

$=2\sin(\frac{1}{2}\text{ sum})\sin(\frac{1}{2}\text{ diff. reversed}).$]

উদাহরণ 1. $\sin 8\theta+\sin 6\theta=2\sin\frac{8\theta+6\theta}{2}\cos\frac{8\theta-6\theta}{2}$

$=2\sin 7\theta\cos\theta.$

উদাহরণ 2. $\sin 14\theta-\sin 8\theta=2\cos\frac{14\theta+8\theta}{2}\sin\frac{14\theta-8\theta}{2}$

$=2\cos 11\theta\sin 3\theta.$

উদাহরণ 3. $\cos 2\theta+\cos 5\theta=2\cos\frac{2\theta+5\theta}{2}\cos\frac{2\theta-5\theta}{2}$

$$=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\left(-\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.$$

উদাহরণ 4. $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ-75^\circ}{2}$

$$=2\sin 45^\circ\sin(-30^\circ)$$

$$=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\tfrac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Prove that $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$.

[ P. U. '42 ]

বামপক্ষ $=\sin 20^\circ\sin 40^\circ.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80^\circ\left[\because\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ.(2\sin 80^\circ\sin 40^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos(80^\circ-40^\circ)-\cos(80^\circ+40^\circ)\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ-\cos 120^\circ\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ-(-\tfrac{1}{2})\}\quad[\because\ \cos 120^\circ=-\tfrac{1}{2}]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ+\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times 2\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin(20^\circ+40^\circ)+\sin(20^\circ-40^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin 60^\circ+\sin(-20^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 20^\circ\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ=\frac{3}{16}.$$

উদা. 2. Find the value of $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$.

প্রদত্ত রাশি $=2\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}-\cos 20^\circ$

$$=2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=2\times\tfrac{1}{2}\times\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$$

$$=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0.$$

উদা. 3. Show that $\cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\sin 35^\circ$.

$\because\ \sin 25^\circ=\cos(90^\circ-25^\circ)$,

$\therefore\ \cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\cos 5^\circ-\cos(90^\circ-25^\circ)$

$$=\cos 5^\circ-\cos 65^\circ=2\sin\frac{5^\circ+65^\circ}{2}\sin\frac{65^\circ-5^\circ}{2}$$

$$=2\sin 35^\circ\sin 30^\circ=2\sin 35^\circ\times\tfrac{1}{2}=\sin 35^\circ.$$

উদা. 4. Prove that $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\frac{3}{2}$.

$\because\ 2\cos^2 A=\cos^2 A+\cos^2 A=\cos^2 A+1-\sin^2 A$

$$=\cos A\cos A-\sin A\sin A+1$$

$$=\cos(A+A)+1=\cos 2A+1.$$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}\{\cos(120^\circ+2A)+1\}$

$$+\tfrac{1}{2}\{\cos(120^\circ-2A)+1\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{3+\cos 2A+\cos(120^\circ+2A)+\cos(120^\circ-2A)\}$$

$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A+2\cos 120^\circ \cos 2A)$
$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A+2\times -\frac{1}{2}\times\cos 2A)$
$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A-\cos 2A)=\frac{3}{2}.$

উদা. 5. Show that $\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{A+B}{2}.$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\cot\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 6. Prove that $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 5\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta}=\tan 3\theta.$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(\sin 5\theta+\sin\theta)+(\sin 4\theta+\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+\cos\theta)+(\cos 4\theta+\cos 2\theta)}$$
$$=\frac{2\sin 3\theta\cos 2\theta+2\sin 3\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta\cos 2\theta+2\cos 3\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{2\sin 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}{2\cos 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\tan 3\theta.$$

উদা. 7. Express

$\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)-\sin(A+B+C)$ as the product of three sines.

[ প্রথম দুইটি পদকে এবং শেষ দুইটি পদকে গুণফলে প্রকাশ করিয়া ]

প্রথম রাশি $=2\sin C\cos(B-A)+2\cos(A+B)\sin(-C)$
$=2\sin C\cos(B-A)-2\cos(A+B)\sin C$
$=2\sin C\{\cos(B-A)-\cos(A+B)\}$
$=2\sin C(2\sin B\sin A)=4\sin A\sin B\sin C.$

উদা. 8. Express $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ as the sum of four cosines.

প্রদত্ত রাশি $=2\cos\alpha.\,2\cos\beta\cos\gamma$
$=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$
$=2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma).$$

উদা. 9. If $\sin A=m\sin B$, prove that

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{A+B}{2}.$$

$\because\ \sin A=m\sin B,\ \therefore\ \frac{\sin A}{\sin B}=\frac{m}{1},$

$\therefore$ by Com. & Div. $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{m-1}{m+1},$

$$\therefore\ \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{m-1}{m+1}, \text{ বা, } \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1},$$

$$\text{বা, } \tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}\times\frac{1}{\cot\frac{A+B}{2}}=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 10. Prove that $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$

$=2\cot^n\frac{A-B}{2}$ or zero, according as $n$ is even or odd.

[P. U, '33]

এখানে বামপক্ষ—

$$=\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n+\left\{\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\left(-\frac{A-B}{2}\right)}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{-\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n.$$

এক্ষণে, $n$ যদি জোড় (even) হয়, তবে $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ধনাত্মক হইয়া $\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ হইবে, সুতরাং তখন প্রদত্ত রাশি $=2\cot^n\frac{A-B}{2}$.

আবার, $n$ যদি বিজোড় ( odd ) হয়, তবে $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ঋণাত্মক হইয়া $-\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ এর সমান হইবে,

সুতরাং তখন প্রদত্ত রাশি $=0$.

* উদা. 11. If $\sin\theta+\sin\phi=a$ and $\cos\theta+\cos\phi=b$, show that $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

$\because\ \sin\theta+\sin\phi=a,\ \therefore\ 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=a\cdots(1)$

আবার, $\because\ \cos\theta+\cos\phi=b,\ \therefore\ 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=b\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) এর বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই

$$4\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}+4\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2,$$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\left\{\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}+\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\right\}=a^2+b^2,$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2$ [$\because$ বামপক্ষের অপর উৎপাদকটি $=1$.]

$\therefore\ \cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}\cdots\cdots(3)$

$$\therefore \quad \sin^2\frac{\theta-\phi}{2}=1-\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$=1-\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\;\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে, (4) কে (3) দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\times\frac{4}{a^2+b^2}=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

উদা. 12. If $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$, prove that

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$$

[ Pat. '45 ]

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)}\cdots\cdots(1)$,

$$\frac{y}{z}=\frac{\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\gamma)}\cdots\cdots(2)$$

এবং $\dfrac{z}{x}=\dfrac{\tan(\theta+\gamma)}{\tan(\theta+\alpha)}\cdots\cdots(3)$.

এক্ষণে (1) হইতে com. & div. দ্বারা পাই

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}$$

$$=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

[ লব ও হরকে $\sin(\alpha-\beta)$ দ্বারা গুণ করিয়া ]

$\therefore \frac{x+y}{x-y} . \sin^2 (\alpha-\beta) = \sin(2\theta++\beta) . \sin(\alpha-\beta)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta) - \cos(2\theta+2\alpha)\} \cdots\cdots (4)$

অনুরূপে (2) হইতে পাই $\frac{y+z}{y-z} \sin^2 (\beta-\gamma)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\gamma) - \cos(2\theta+2\beta)\} \cdots (5)$

এবং (3) হইতে পাই $\frac{z+x}{z-x} \sin^2 (\gamma-\alpha)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\alpha) - \cos(2\theta+2\gamma)\} \cdots (6)$

এক্ষণে (4), (5), (6) যোগ করিয়া পাই

প্রদত্ত বামপক্ষ $= \frac{1}{2} \times \{0\} = 0$.

## Exercise 3

Express the following as a sum or difference :—

1. $2 \sin 5\theta \cos 2\theta$
2. $2 \cos 7\theta \sin 8\theta$
3. $\cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{7\theta}{2}$
4. $2 \sin 3A \sin (A+B)$

Express in the form of a product :—

5. $\sin 80° + \sin 40°$
6. $\sin 3\theta - \sin 7\theta$
7. $\cos 7A + \cos 3A$
8. $\cos 7\theta - \cos 9\theta$

Find the value of :—

9. $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$
10. $\sin 78° - \sin 18° + \cos 132° + \cos \frac{\pi}{3}$
11. $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$
12. $\sqrt{3} \sin 20° \sin 40° \sin 80°$
13. $\frac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°}$

Prove the following identities :—

14. $\dfrac{\sin\theta+\sin\alpha}{\cos\theta+\cos\alpha}=\tan\dfrac{(\theta+\alpha)}{2}$

15. $\dfrac{\sin 2\theta+\sin 3\theta}{\cos 2\theta-\cos 3\theta}=\cot\dfrac{\theta}{2}$

16. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta$

17. $\sin\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=\frac{1}{4}\sin 3\theta$

18. $\dfrac{\cos(2A-3B)+\cos 3B}{\sin(2A-3B)+\sin 3B}=\cot A.$

19. $\cos 95^\circ+\cos 25^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 10^\circ+\sin 10^\circ)$

20. $\cos\theta+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=0$

*21. $\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}=\tan 35^\circ$

22. $\sin^2 5\theta-\sin^2 3\theta=\sin 8\theta\sin 2\theta$

23. $\dfrac{\cos(A+B)-2\cos A+\cos(A-B)}{\sin(A+B)-2\sin A+\sin(A-B)}=\cot A.$

24. $\cos 10^\circ-\sin 40^\circ=\sin 20^\circ$

*25. $\dfrac{\sin 7A-\sin 3A-\sin 5A+\sin A}{\cos 7A+\cos 3A-\cos 5A-\cos A}=\tan 2A$

26. $\sin^2\theta+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{3}{2}$

27. $4\cos\theta\cos(120^\circ+\theta)\cos(120^\circ-\theta)=\cos 3\theta$

28. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$=4\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+A}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}.$ [A. U. '45]

29. Express $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A+B+C)$ as the product of three sines.

30. Express $4 \sin A \cos B \cos C$ as the sum of four sines.

31. If $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$,
then $\tan A \tan B = \cot \frac{1}{2}(A+B)$. [P. U. '36]

32. Express $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) - \sin(A+B+C)$ as the product of three sines.

*33. If $\cos A = k \cos B$, show that

$$\cot \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{k+1}{k-1} \tan \tfrac{1}{2}(B-A).$$

34. If $\cos A + \cos B = \frac{1}{3}$ and $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$, find the value of $\tan \frac{1}{2}(A+B)$.

*35. Simplify $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}$.

[ A. U. '48 ]

36. If $\sin A + \sin B = a$, and $\cos A + \cos B = b$, find the value of $\cot \dfrac{A-B}{2}$.

37. If $x \cos \alpha + y \sin \alpha = k = x \cos \beta + y \sin \beta$, prove that

$$\frac{x}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

## Multiple Angles

### ( গুণিতক কোণ )

19. 2A কোণের কোণানুপাত ( Trigonometrical ratios of angle 2A )

A কোণের গুণিতক ( multiple ) 2A কোণ, কারণ 2A কোণটি A কোণের দ্বিগুণ। অনুরূপে 3A, 4A প্রভৃতি কোণগুলিকে গুণিতক কোণ বলা হয়। এখানে গুণিতক কোণের কোণানুপাত নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(*a*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, A ও B এর যে কোন মানে $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ এবং

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A=2\sin A\cos A \cdots (1)$$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$$\cos 2A=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A \cdots (2)$$

$$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1 \cdots (3)$$

[ অথবা (2) হইতে ] $=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A \cdots (4).$

অতএব, $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$ হইল।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** (3) ও (4) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$1+\cos 2A=2\cos^2 A \cdots (5)$, এবং $1-\cos 2A=2\sin^2 A \cdots (6)$

অতএব, $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\dfrac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=\tan^2 A.$

(*b*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

এবং $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে $B=A$ বসাইয়া পাই

$$\tan 2A=\frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}\cdots(7)$$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2 \cot A}\cdots(8)$$

[ **দ্রষ্টব্য :** A ও B-এর যে কোন মানে যোগের সূত্রগুলি ( addition formulæ ) সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ বলিয়া প্রমাণিত হওয়ায় ঐ সূত্রগুলি হইতে লব্ধ উপরের সূত্রগুলিও A-এর যে কোন মানে সিদ্ধ হইবে। ]

**20. 3A কোণের কোণানুপাত ( Trigonometrical ratios of angle 3A )**

পূর্বের সূত্রগুলি হইতে পাই

(i) $\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A \cos A+\cos 2A \sin A$
$=2 \sin A \cos A . \cos A+(1-2 \sin^2 A) . \sin A$
$=2 \sin A \cos^2 A+\sin A-2 \sin^3 A$
$=2 \sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2 \sin^3 A$
$=2 \sin A-2 \sin^3 A+\sin A-2 \sin^3 A$
$=3 \sin A-4 \sin^3 A.$

অতএব, $\sin 3A=3 \sin A-4 \sin^3 A.$

(ii) $\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A \cos A-\sin 2A \sin A$
$=(2 \cos^2 A-1) \cos A-2 \sin A \cos A . \sin A$
$=2 \cos^3 A-\cos A-2 \sin^2 A \cos A$
$=2 \cos^3 A-\cos A-2 \cos A(1-\cos^2 A)$
$=4 \cos^3 A-3 \cos A.$

অতএব, $\cos 3A=4 \cos^3 A-3 \cos A.$

[ **দ্রষ্টব্য :** উপরে দেখা গেল যে $\sin 3A$ বা $\cos 3A$ নির্ণয়ের সময় $\cos 2A$ এর মান বসাইতে হইয়াছে, কিন্তু $\cos 2A$ এর মান $2 \cos^2 A-1$ এবং $1-2 \sin^2 A$ দুইই হইতে পারে। অতএব উহার কোন্ মানটি বসাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার জন্য মনে রাখিবে যে, sin এর মান

নির্ণয়ের জন্য cos 2A এর sine দিয়া মানটি এবং cosine এর মান নির্ণয়ের জন্য cos 2A এর cosine দিয়া মানটি বসাইতে হয়। ]

(iii) **tan 3A** $=\tan(2A+A)=\dfrac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$

$$=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A}=\frac{\dfrac{2\tan A+\tan A-\tan^3 A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$$

(iv) **sin 2A ও cos 2A কে tan A এর আকারে প্রকাশ।**

[C. U. '31]

$$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}$$

$[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

$$=\frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}}$$ [ লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করিয়া ]

$$=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

**অন্যরূপে প্রমাণ :** $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=2\frac{\sin A}{\cos A}.\cos^2 A=2\tan A.\cos^2 A$$

$$=2\tan A\frac{1}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A-\cos^2 A.\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\cos^2 A(1-\tan^2 A)=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** উপরের সূত্রগুলিতে প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে A-এর উচ্চতর যে কোন গুণিতক কোণেরই কোণানুপাতগুলি A কোণের কোণানুপাতে প্রকাশ করা যায়। এ পর্যন্ত প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ]

## উদাহরণমালা 4

**উদা. 1.** Express $\cos 4\theta$ in terms of $\sin \theta$.

$$\cos 4\theta = \cos 2(2\theta) = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(\sin 2\theta)^2$$
$$= 1 - 2(2\sin\theta\cos\theta)^2 = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$= 1 - 8\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta.$$

**উদা. 2.** If $\sin A = \frac{3}{5}$, find the value of $\cos 2A$.

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2 \times \tfrac{9}{25} = \tfrac{7}{25}.$$

**উদা. 3.** Find $\tan A$, when $\cos 2A = \frac{24}{25}$.

$$\because \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}, \therefore \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{24}{25},$$

$$\therefore \frac{2}{2\tan^2 A} = \frac{49}{1} \text{ (by Com. \& Div.)},$$

বা, $\tan^2 A = \frac{1}{49}$. $\therefore \tan A = \frac{1}{7}$.

**উদা. 4.** If $\cos A = \frac{4}{5}$, find the value of $\sin 3A$.

$$\because \cos A = \tfrac{4}{5}, \therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \tfrac{16}{25}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}.$$

এক্ষণে, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3 \times \frac{3}{5} - 4(\frac{3}{5})^3$
$$= \tfrac{9}{5} - \tfrac{108}{125} = \tfrac{117}{125}.$$

**উদা. 5.** Prove that $\cos^2(45^\circ - \theta) - \sin^2(45^\circ - \theta) = \sin 2\theta$.

বামপক্ষ $= \cos^2 A - \sin^2 A$ [$A = 45^\circ - \theta$ ধরিয়া ]
$$= \cos 2A = \cos 2(45^\circ - \theta) = \cos(90^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta.$$

**উদা. 6.** Show that $\sin 8\theta = 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

বামপক্ষ $= \sin 8\theta = \sin 2(4\theta) = 2\sin 4\theta\cos 4\theta$
$= 2.\ 2\sin 2\theta\cos 2\theta.\ \cos 4\theta$ [$\because \sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$]

$=2.\,2.\,2\sin\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta$

$[\because \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta]$

$=8\sin\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta.$

উদা. 7. Prove that $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$
$=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A).$

বামপক্ষ$=(\cos^2 A)^3+(\sin^2 A)^3$

$=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^4 A-\cos^2 A\sin^2 A+\sin^4 A)$

$=\cos^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\sin^4 A$

$[\because \cos^2 A+\sin^2 A=1]$

$=(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A$

$=\mathbf{1-3\sin^2 A\cos^2 A}$. [ প্রমাণিত হইল ]

$=1-3\times(\frac{1}{2}\sin2A)^2$ $[\because \sin2A=2\sin A\cos A]$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A=1-\frac{3}{4}(1-\cos^2 2A)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2A$

$=\mathbf{\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A)}.$

উদা. 8. Show that $\cot\theta-\tan\theta=2\cot2\theta$.

বামপক্ষ$=\cot\theta-\dfrac{1}{\cot\theta}=\dfrac{\cot^2\theta-1}{\cot\theta}=2.\dfrac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}=2\cot2\theta.$

উদা. 9. Prove that $\dfrac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}=\tan\theta$. [C. U. '38]

বামপক্ষ$=\dfrac{(1-\cos2\theta)+\sin2\theta}{(1+\cos2\theta)+\sin2\theta}$

$=\dfrac{2\sin^2\theta+\sin2\theta}{2\cos^2\theta+\sin2\theta}$ [ অনুচ্ছেদ 19, সূত্র 5 ও 6 ]

$=\dfrac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\tan\theta.$

উদা. 10. If $\tan\theta=\dfrac{x}{y}$, find the value of $x\sin2\theta+y\cos2\theta$.

[B. H. U. '40]

$\because \tan\theta=\dfrac{x}{y}$, $\therefore \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{x}{y}$, $\therefore y\sin\theta=x\cos\theta.$

এক্ষণে, $x \sin 2\theta + y \cos 2\theta = 2.\ x \sin\theta \cos\theta + y(1-2\sin^2\theta)$

$$= 2\sin\theta.\ x\cos\theta + y(1-2\sin^2\theta)$$
$$= 2\sin\theta.\ y\sin\theta + y(1-2\sin^2\theta)$$
$$= 2y\sin^2\theta + y(1-2\sin^2\theta) = y.$$

উদা. 11. Prove that $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$. [B. H. U. '57]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\dfrac{1}{\cos 8A} - 1}{\dfrac{1}{\cos 4A} - 1} = \frac{1-\cos 8A}{\cos 8A} \times \frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$$

$$= \frac{2\sin^2 4A.\cos 4A}{\cos 8A.2\sin^2 2A}$$

$$= \frac{2\sin 4A\cos 4A \times \sin 4A}{\cos 8A.2\sin^2 2A} = \frac{\sin 8A}{\cos 8A} \times \frac{\sin 4A}{2\sin^2 2A}$$

$$= \tan 8A \times \frac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A} = \tan 8A \times \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$= \tan 8A\ \cot 2A = \tan 8A \times \frac{1}{\tan 2A} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}.$$

উদা. 12. Prove that $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$
$= \tan 3A \tan 2A \tan A.$

$$\text{বামপক্ষ} = \tan(2A + A) - \tan 2A - \tan A$$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} - \tan 2A - \tan A$$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A - \tan 2A - \tan A + (\tan 2A + \tan A)\tan 2A \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}.\ \tan 2A \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A.$$

উদা. 13. Show that $\cos^2\theta + \cos^2(\alpha+\theta)$
$-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ is independent of $\theta$. [P. U. '46]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \cos^2\theta + (\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)^2$$
$$-2\cos\alpha\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha)$$

$= \cos^2\theta + \cos^2\alpha \cos^2\theta + \sin^2\alpha \sin^2\theta - 2\cos\alpha \cos\theta \sin\alpha \sin\theta$
$\qquad - 2\cos^2\alpha \cos^2\theta + 2\cos\alpha \cos\theta \sin\alpha \sin\theta$

$= \cos^2\theta - \cos^2\alpha \cos^2\theta + \sin^2\alpha \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - \cos^2\theta(1 - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha(1 - \cos^2\theta)$

$= \cos^2\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\theta \sin^2\alpha$

$= \sin^2\alpha$, ইহা $\theta$ নিরপেক্ষ।

**উদা. 14.** Prove that $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

$= (1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$.

$$\because \quad 1+\sec 2\theta = 1 + \frac{1}{\cos 2\theta} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

$$= 1 + \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2}{1-\tan^2\theta},$$

$$\therefore \quad \tan\theta\,(1+\sec 2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

[ উভয় পক্ষকে $\tan\theta$ দ্বারা গুণ করিয়া ]

$$= \tan 2\theta.$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\tan 2\theta.(1+\sec 2^2\theta) = \tan 2^2\theta$, $\tan 2^2\theta(1+\sec 2^3\theta) = \tan 2^3\theta, \cdots\cdots$, এবং $\tan 2^{n-1}\theta(1+\sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta$.

$$\therefore \quad \tan\theta(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta} = (1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta).$$

## Exercise 4

1. If $\cot A = 3$, find $\tan 2A$.
2. If $\sec\theta = 3$, find the value of $\cos 3\theta$.

3. If $\sin 2A = \cdot 28$, find $\tan A$.

4. (i) Simplify $\sin 3A \operatorname{cosec} A - \dfrac{\cos 3A}{\cos A}$.

(ii) Express $\sin 2A$ and $\cos 2A$ in terms of $\tan A$.

[ C. U. '31 ]

Prove the following identities :—

5. $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \cot \theta$

6. $\cot 2A + \tan A = \operatorname{cosec} 2A$ [ C. U. '47 ]

7. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ 8. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A} = \sec 2A$.

9. $\dfrac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$

10. $\cot A + \cot(60° + A) + \cot(120° + A) = 3 \cot 3A$.

[ Pat. '45 ]

11. $\dfrac{\cos 3\theta + \sin 3\theta}{\cos \theta - \sin \theta} = 1 + 2 \sin 2\theta$.

12. $\sin^3 A + \sin^3(120° + A) + \sin^3(240° + A) = -\frac{3}{4} \sin 3A$.

[P. U. '39 ]

13. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 2 \tan 2\theta$.

14. $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$. [P. U. '39, '43]

15. $\dfrac{\sin A + \sin 2A + \sin 4A + \sin 5A}{\cos A + \cos 2A + \cos 4A + \cos 5A} = \tan 3A$.

16. $\cos^2 A + \cos^2\left(A + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$. [C. U. '43]

17. $\cos 3\theta \sin 2\theta - \cos 4\theta \sin \theta = \dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{cosec} \theta}$.

18. $2 \operatorname{cosec} 2A = \tan A + \cot A$. [ B. H. U. '48 ]

19. $4 \sin^3 \theta \cos 3\theta + 4 \cos^3 \theta \sin 3\theta = 3 \sin 4\theta$

[ Hints : $4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$, এবং

$4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$ ]

20. $\dfrac{\sin (A+3B) + \sin (3A+B)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2 \cos (A+B).$ [A. U. '47]

21. $\cos 4x - \cos 4y = 8(\cos x - \cos y)(\cos x + \cos y) \times$

$(\cos x - \sin y)(\cos x + \sin y).$ [P. U. '36]

22. $\dfrac{\sin 4A\,(1-\cos 2A)}{\cos 2A\,(1-\cos 4A)} = \tan A.$

23. $\dfrac{1}{\tan 3\alpha - \tan \alpha} - \dfrac{1}{\cot 3\alpha - \cot \alpha} = \cot 2\alpha.$

24. If $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$, show that $\tan (\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}.$

[C. U. '46 ; P. U. '47]

25. Find the value of $\cos^2\theta + \cos^2(120° - \theta) + \cos^2(120° + \theta)$.

26. If $\tan \theta = \sec 2\alpha$, prove that $\sin 2\theta = \dfrac{1-\tan^4 \alpha}{1+\tan^4 \alpha}.$

[P. U. '40]

27. If $\alpha$ and $\beta$ are acute angles and $\cos 2\alpha = \dfrac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$,

show that $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$. [ C. U. '41 ]

28. If $\tan \theta = \frac{1}{7}$ and $\tan \phi = \frac{1}{3}$, show that $\cos 2\theta = \sin 4\phi$.

[ A. U. '50 ]

29. If $\theta = \dfrac{\pi}{2^n + 1}$, prove that

$2 \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{n-1} \theta = 1.$

30. Prove that $\dfrac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1} = (2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1) \times$

$(2 \cos 2^2\theta - 1) \cdots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1).$

## Submultiple Angles

( অংশ কোণ )

কোন একটি কোণের $\frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{3}$ অংশকে ঐ কোণের অংশ কোণ ( Submultiple angle ) বলা হয়। $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{3}$ কোণ দুইটি A কোণের Submultiple Angle.

**21.** গুণিতক কোণগুলি সম্বন্ধে আমরা নিম্নের সূত্রগুলি প্রমাণ করিয়াছি :—

(1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$ ;

$[1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A ; 1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A]$

(3) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$.

কোন একটি কোণ অপর কোণের দ্বিগুণ হইলেই উপরের সূত্রগুলি সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে, ঐ সূত্রগুলিতে A-এর স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া ( সুতরাং 2A-এর স্থানে $2.\frac{A}{2}$ বা A বসাইয়া ) যথাক্রমে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :—

(1) $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

(2) $\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$

$\left[1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} ; 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]$

(3) $\tan A = \dfrac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$.

22. গুণিতক কোণ সম্বন্ধে পূর্বে নিম্নের তিনটি সূত্রও প্রমাণিত হইয়াছে।

(4) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(5) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(6) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$

কোন একটি কোণ অন্য একটি কোণের তিন গুণ হইলেই উপরের সূত্র তিনটি সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে ঐ সূত্রগুলিতে Aএর স্থানে $\frac{A}{3}$ বসাইয়া ( সুতরাং 3A এর স্থানে $3.\frac{A}{3}$ বা A বসাইয়া ) পাই :—

(4) $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

(5) $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

(6) $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{5} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}.$

**অনুসিদ্ধান্ত :** (1) $\because \sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$\therefore$ A এর স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া পাই $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

(ii) $\because \cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$, $\therefore \cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}.$

23. cos A দ্বারা $\frac{A}{2}$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

$\because\ 1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2},\ \therefore \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$

$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$......(i)

আবার, $\because\ 1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2},\ \therefore\ \cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$,

$\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)}$......(ii)

অতএব, $\tan\frac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$......(iii)

[ এখন অপর অনুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে। ]

24. **Ambiguity of signs** ( চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা )।

উপরের 23 অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে cos Aএর মান হইতে $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$এর দুইটি মান পাওয়া যায়। ঐ মান দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। এইরূপ দুইটি মান প্রাপ্ত হওয়ার কারণ এই যে, যদি কেবল cos A এর মান জানা থাকে, কিন্তু A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে, তবে A এর যে কোনও মান হইতে পারে, সুতরাং $\frac{A}{2}$ এরও যে কোন মান হইতে পারে। যদি ঐ মান-শ্রেণীর ক্ষুদ্রতম কোণ $\alpha$ ধরা হয়, তবে $A=2n\pi\pm\alpha$ হইবে ( এখানে $n$ যে কোন পূর্ণসংখ্যা )।

অতএব, $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$এর মান নির্ণয় করিবার জন্য আমরা প্রকৃতপক্ষে $\sin\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)$ ও $\cos\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)$ এর মান নির্ণয় করিতেছি।

এক্ষণে, $\sin\frac{1}{2}(2n\pi\pm\alpha)=\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\sin n\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pm\cos n\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sin\frac{\alpha}{2}$.

কারণ, $\sin n\pi=0$ এবং $\cos n\pi=\pm1$.

আবার, $\cos \frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha) = \cos n\pi \cos \frac{\alpha}{2} \mp \sin n\pi \sin \frac{\alpha}{2}$

$$= \pm \cos \frac{\alpha}{2}.$$

অতএব, যদি A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে এবং কেবল cos A এর মান জানা থাকে, তবে $\sin \frac{A}{2}$ ও $\cos \frac{A}{2}$ এর দুইটি করিয়া মান হইবে।

আর, যদি A এর মানও জানা থাকে, কিংবা A এর মানের সীমা ( যথা 450° ও 540° এর মধ্যে ইত্যাদি ) জানা থাকে, তবে $\sin \frac{A}{2}$ বা $\cos \frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে, সে বিষয়ে আর কোন অনিশ্চয়তা ( ambiguity ) থাকে না। তখন উহা কোন্ পাদে ( quadrant ) অবস্থিত জানা যাইবে এবং উহার signও নির্দিষ্ট হইবে।

**উদাহরণ।** $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে sin 165° ও cos 165° এর মান নির্ণয় কর।

$$\sin 165° = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 330°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

আবার, $\cos 165° = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 330°)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

এক্ষণে, 165° কোণ দ্বিতীয় পাদে ( quadrant ) অবস্থিত বলিয়া উহার sine ধনাত্মক এবং cosine ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \sin 165° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, এবং $\cos 165° = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

25. sin A দ্বারা $\sin\frac{A}{2}$ ও $\cos\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয়।

$\because \quad \sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\cdots\cdot(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A,$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\cdots\cdots(3)$$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A,$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে, (3) ও (4) যোগ করিয়া পাই

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A},$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(5)$$

অনুরূপে (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(6)$$

**26. Ambiguity of signs.**

উপরের (5) ও (6) সূত্র দুইটি হইতে দেখা যায় যে, sin A-এর একটি মানের জন্য $\sin\frac{A}{2}$ বা $\cos\frac{A}{2}$ এর চারিটি মান হয়।

যদি কেবলমাত্র sin A-এর মান জানা থাকে, কিন্তু A কোণ সম্বন্ধে অন্য কিছু জানা না থাকে, তবে A এর একটি মান-শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন মান

হইতে পারে। মনে কর $\alpha$ ঐ মান-শ্রেণীর অন্তর্গত ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ। অতএব $A=n\pi+(-1)^n\alpha$, সুতরাং $\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}$ এবং $\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}$.

এক্ষণে, (i) যদি $n$ জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, মনে কর $n=2m$.

$$\therefore \quad \sin\tfrac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}=\sin\left\{m\pi+(-1)^{2m}\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$=\sin\left(m\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin m\pi\cos\frac{\alpha}{2}+\cos m\pi\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\pm\sin\frac{\alpha}{2}\ [\because \quad \sin m\pi=0 \text{ এবং } \cos m\pi=\pm1\ ]$$

(ii) যদি $n$ বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, মনে কর $n=2m+1$.

$$\therefore \quad \sin\tfrac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n\alpha=\sin\tfrac{1}{2}\{(2m+1)\pi+(-1)^{2m+1}\alpha\}$$

$$=\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)[\because (-1)^{2m+1}=-1\ ]$$

$$=\sin m\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos m\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

অতএব দেখা গেল যে, কেবল sin Aএর মান জানা থাকিলে এবং A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকিলে $\sin\frac{A}{2}$ এর চারিটি মান পাওয়া যায়।

অনুরূপে দেখান যায় যে, এইরূপ ক্ষেত্রে

$\cos\frac{A}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}$ বা $\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$, অর্থাৎ $\cos\frac{A}{2}$ এরও চারিটি মান পাওয়া যায়।

এখন দেখ, $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}.$$

আবার, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

অতএব, যদি A জানা থাকে, তবে $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ও $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ এর sign ( ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ) নির্দিষ্ট ভাবে জানা যায় এবং sign সম্বন্ধে আর কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

**27. tan A দ্বারা tan $\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয়।**

সূত্র হইতে পাই $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$,

$$\therefore \quad \tan A-\tan A\tan^2\frac{A}{2}=2\tan\frac{A}{2},$$

বা, $\tan A\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$, ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, এই সমীকরণটি সমাধান করিয়া পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\tan A\times-\tan A}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+\tan^2 A}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

[ পূর্ব অনুচ্ছেদগুলিতে sign-এর অনিশ্চয়তা ( ambiguity ) সম্বন্ধে যে যুক্তি দেখান হইয়াছে, এস্থলেও তাহা প্রযোজ্য। ]

28. $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(i) মনে কর $A=18^\circ$, সুতরাং $5A=90^\circ$, $\therefore\ 2A=90^\circ-3A$.

$\therefore\ \sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$,

বা, $2\sin A\cos A=\cos A\,(4\cos^2 A-3)$.

এক্ষণে, $\because A=18^\circ$, $\therefore \cos A\neq 0$,

$\therefore\ 2\sin A=4\cos^2 A-3=4(1-\sin^2 A)-3=1-4\sin^2 A$,

বা, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$,

$$\therefore\ \sin A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times4\times-1}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

এখানে A একটি সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin A$ ধনাত্মক, সুতরাং উপরে লব্ধ মান দুইটির মধ্যে কেবল ধনাত্মক মানটিই গ্রহণ করিতে হইবে।

$$\therefore\ \sin 18^\circ=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

আবার, $\cos 18^\circ=+\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

(ii) $\cos 36^\circ=\cos 2.18^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$

$$=1-2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$\sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$$
$$=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(6+2\sqrt{5})}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(iii) $54^\circ$ কোণ $36^\circ$ কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$\sin 54^\circ=\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$,

এবং $\cos 54^\circ=\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

(iv) $72^\circ$ কোণ $18^\circ$ কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$,

এবং $\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

## উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Find **sin 15°** and **cos 15°**.

$\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = +\sqrt{1+\sin 30^\circ} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdots \text{(i)}$

$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = +\sqrt{1-\sin 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdots \text{(ii)}$

(i) ও (ii) যোগ করিয়া $2\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া $2\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

উদা. 2. Find $\sin\frac{\pi}{8}$ and $\cos\frac{\pi}{8}$.

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 45^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

উদা. 3. Show that $\cos 7^\circ 30' = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[ Pat. '38 ]

$7^\circ 30' \times 2 = 15^\circ$ ;

$\because \quad 2\cos^2 7^\circ 30' = 1+\cos 15^\circ = 1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$,

$\therefore \quad \cos^2 7^\circ 30' = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})$

[ $\sqrt{2}$ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করিয়া

আবার, $\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$=\frac{1}{16}(6+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$=\frac{1}{8}(3+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})=\frac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2}).$

$\therefore\ \cos^2 7°30'=\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$\therefore\ \cos 7°30'=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

**উদা. 4.** Find the **ratios** of 3° **and multiples of** 3°.

$\sin 3°=\sin(18°-15°)=\sin 18°\cos 15°-\cos 18°\sin 15°$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}.\sqrt{2}.\sqrt{5+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})$$

$\cos 3°=\cos(18°-15°)=\cos 18°\cos 15°+\sin 18°\sin 15°$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}+1)+\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

**দ্রষ্টব্য ঃ** এ পর্যন্ত 3°, 15°, 18°, 30°, 36°, 45° কোণের কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছে বলিয়া উহাদের সাহায্যে 3° এর যে কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিও জানা যাইবে। কারণ, $6°=36°-30°$ ; $9°=45°-36°$ ; $12°=30°-18°$ ; $21°=36°-15°$ ; ইত্যাদি।

3° এর গুণিতক যদি 45° অপেক্ষা বড় হয়, তবে তাহার পূরক কোণ (complement) 45° অপেক্ষা ছোট হইবে, সুতরাং ঐ পূরক কোণের কোণানুপাত হইতে 45° অপেক্ষা বৃহত্তর 3° এর গুণিতক কোণগুলিরও কোণানুপাতগুলি জানা যাইবে।

**উদা. 5.** Show that $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

উদা. 6. Prove that $(\cos^2 66^\circ - \sin^2 6^\circ)(\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ) = \frac{1}{16}$. [ C. U. (B. Sc.) '49 ]

$\because \cos 66^\circ = \cos(90^\circ - 24^\circ) = \sin 24^\circ$,

এবং $\cos 48^\circ = \cos(90^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ$,

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $= (\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ)(\sin^2 42^\circ - \sin^2 12^\circ)$

$= \sin(24^\circ + 6^\circ) \sin(24^\circ - 6^\circ) \sin(42^\circ + 12^\circ) \sin(42^\circ - 12^\circ)$

[ $\because \sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B).\sin(A-B)$ ]

$= \sin 30^\circ \sin 18^\circ \sin 54^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).\frac{1}{2} = \frac{1}{64}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$

$= \frac{1}{64} \times 4 = \frac{1}{16}$.

উদা. 7. Show that $4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ)$
$= 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$.

$\because \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,

$\therefore \cos 30^\circ = 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ$ [ $A = 10^\circ$ ধরিয়া ]

আবার, $\because \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore \sin 60^\circ = 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ$ [ $A = 20^\circ$ ধরিয়া ]

এক্ষণে, $4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 4\cos^3 10^\circ + 4\sin^3 20^\circ$

$= \cos 30^\circ + 3\cos 10^\circ + 3\sin 20^\circ - \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$.

উদা. 8. If $\cos A = \frac{4}{5}$ and $\cos B = \frac{3}{5}$, find the value of $\cos\frac{A-B}{2}$, A and B being positive acute angles.

$\because \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$,

$\therefore \cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos(A-B)\}}$ [ $\theta = A - B$ ধরিয়া ]

এক্ষণে, $\cos (A-B)=\cos A \cos B+\sin A \sin B$, এবং

$\because \cos A=\frac{4}{5}, \quad \therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$ [ $\because$ A সূক্ষ্মকোণ ]

এবং $\because \cos B=\frac{3}{5}, \quad \therefore \sin B=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$ [ $\because$ B সূক্ষ্মকোণ ]

$\therefore \cos (A-B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$.

এক্ষণে, $\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{24}{25})}=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

উদা. 9. If $270°<\theta<360°$ and $\cos\theta=\frac{119}{169}$, find $\sin\frac{\theta}{2}$ and $\cos\frac{\theta}{2}$.

$\because$ $\theta$ কোণ $270°$ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু $360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

$\therefore$ $\frac{\theta}{2}$ অবশ্যই $135°$ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ এখানে $\sin\frac{\theta}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ ঋণাত্মক হইবে।

এক্ষণে, $\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{119}{169}}{2}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$,

এবং $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}}=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

উদা. 10. Show that $\frac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\frac{A}{2}$.

বামপক্ষ $=\frac{2\sin A-2\sin A\cos A}{2\sin A+2\sin A\cos A}=\frac{2\sin A(1-\cos A)}{2\sin A(1+\cos A)}$

$$=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\tan^2\frac{A}{2}.$$

উদা. 11. Prove that $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2$

$$=4\cos^2\frac{A+B}{2}.$$

বামপক্ষ $=\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B+\sin^2 A+\sin^2 B$

$$-2\sin A\sin B$$

$$=(\cos^2 A+\sin^2 A)+(\cos^2 B+\sin^2 B)$$

$$+2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$

$$=1+1+2\cos(A+B)=2+2\cos(A+B)$$

$$=2\{1+\cos(A+B)\}=2\times 2\cos^2\frac{A+B}{2}=4\cos^2\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 12. If $A=240°$, is the statement

$2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1+\sin A}$ correct? If not, how must it be modified?

এখানে $A=240°$, $\therefore\ \frac{A}{2}=120°$, স্বতরাং $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos\frac{A}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}\cdots(1)$$

এবং $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1-\sin A}\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$

অতএব, এখানে প্রদত্ত statement শুদ্ধ নহে, উহার অমূলদ রাশি দুইটির মধ্যে $-$ চিহ্ন স্থানে $+$ চিহ্ন হইলে শুদ্ধ হইবে।

উদা. 13. If $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, prove that $\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. [ Pat. '44 ]

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\dfrac{1}{\cos(\phi+\alpha)}+\dfrac{1}{\cos(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\dfrac{\cos(\phi-\alpha)+\cos(\phi+\alpha)}{\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\dfrac{2\cos\phi\cos\alpha}{\cos^2\phi-\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $2\cos^2\phi-2\sin^2\alpha=2\cos^2\phi\cos\alpha$,

বা, $2\cos^2\phi-2\cos^2\phi\cos\alpha=2\sin^2\alpha$,

বা, $2\cos^2\phi(1-\cos\alpha)=2\sin^2\alpha$,

বা। $\cos^2\phi=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$,

$\therefore\ \cos\phi=\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

উদা. 14. If $\tan A=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}$, prove that one of the values of $\tan\dfrac{A}{2}$ is $\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$.

$\because\ \sec^2 A=1+\tan^2 A$,

$\therefore$ এখানে $\sec^2 A=1+\left(\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}\right)^2$

$$=1+\frac{\sin^2 B\sin^2 C}{(\cos B+\cos C)^2}=\frac{(\cos B+\cos C)^2+\sin^2 B\sin^2 C}{(\cos B+\cos C)^2}$$

$$=\frac{(\cos B+\cos C)^2+(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)}{(\cos B+\cos C)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 B\cos^2 C+2\cos B\cos C+1}{(\cos B+\cos C)^2}=\frac{(1+\cos B\cos C)^2}{(\cos B+\cos C)^2}$$

$\therefore\ \sec A=\dfrac{1+\cos B\cos C}{\cos B+\cos C}$, $\therefore\ \cos A=\dfrac{\cos B+\cos C}{1+\cos B\cos C}$,

$\therefore$ Com. & Div. দ্বারা পাই

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1+\cos B\cos C-\cos B-\cos C}{1+\cos B\cos C+\cos B+\cos C}$$

$$=\frac{(1-\cos B)(1-\cos C)}{(1+\cos B)(1+\cos C)},$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{B}{2}.\ 2\sin^2\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}.\ 2\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{\sin^2\frac{B}{2}\ \sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2},\quad \therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

অতএব, $\tan\frac{A}{2}$ এর একটি মান $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ হইল।

## Exercise 5

1. Find $\sin 9^\circ$ and $\cos 9^\circ$.
2. Prove that $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [ B.H. U. 38]
3. Find the value of $\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ$.
4. Find the value of $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ$.
5. Evaluate $2\sin 75^\circ \sin 15^\circ$.
6. Show that $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$.
7. Show that $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{\cot\frac{1}{2}A+1}{\cot\frac{1}{2}A-1}$.
8. If $\sin A=\frac{60}{61}$ and $\sin B=\frac{4}{5}$, find the value of $\sin^2\frac{A-B}{2}$ and $\cos^2\frac{A+B}{2}$, the angles A and B being positive acute angles.
9. Show that $\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ + \cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{9}{16}$.
10. Find the value of $\sin^2 72^\circ \cos^2 54^\circ - \sin 54^\circ \cos 72^\circ$. [ C. U. (B. Sc.) '48 ]

**11.** If $\sin \alpha + \sin \beta = a$ and $\cos \alpha + \cos \beta = b$, find the values of $\cos(\alpha+\beta)$ and $\tan \frac{\alpha-\beta}{2}$.

**12.** If A lies between 450° and 630°, find $\sin\frac{A}{2}$ and $\cos\frac{A}{2}$ in terms of A.

Prove that :—

**13.** $\sec \theta + \tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$. [ C. U. 39 ]

**14.** $4(\cos^3 25° + \cos^3 35°) = 3(\cos 25° + \cos 35°)$.

**15.** $\tan 6° \tan 42° \tan 66° \tan 78° = 1$.

**16.** $\tan\frac{A+B}{2} + \tan\frac{A-B}{2} = \frac{2\sin A}{\cos A + \cos B}$. [B. H. U. '39]

**17.** $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta) - \sin\theta \sin\frac{1}{2}(\phi+\theta) = \cos\theta\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)$.
[ C. U. '50 ]

**18.** $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$. [B. H. U. '47]

**19.** $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.
[ Pat. '38, B. H. U. '46 ]

**20.** $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)$.

**21.** If $\theta = 340°$, is the statement $2\sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta}$ correct ? If not, how must it be modified ?

**22.** If A = 320°, prove that $\tan\frac{A}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$.

**23.** If $\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$, prove that one value of $\tan\frac{\theta}{2}$ is $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$. [ Pat. '42 ]

24. If $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, and $\alpha$ lies between 180° and 270°, find the values of $\sin\frac{\alpha}{2}$ and $\cos\frac{\alpha}{2}$. [Pat. '42 ]

25. Prove that $2\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$ and determine which are the correct signs when $270° > A > 180°$.
[B. H. U. '31]

26. If $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \tan\frac{\phi}{2}$, show that $\cos\phi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$.
[ Pat. '40 ; A. U. '44, '46 ]

[ Hints : $\tan\frac{\phi}{2} = \dfrac{\sqrt{1+e}\ \sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-e}\cos\frac{\theta}{2}}$,

বা, $\dfrac{1}{\tan^2\frac{\phi}{2}} = \dfrac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\therefore \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} - (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} + (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

আবার, $\cos\phi = \dfrac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$, $\therefore\ \cos\phi = \cdots\cdots$ ]

27. Show that

$$\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}.$$

## Trigonometrical Identities

### ( অভেদাবলী )

**29.** তিন বা তদধিক কোণ কোন সম্বন্ধযুক্ত হইলে সেইগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক অভেদাবলী পাওয়া যায়। বিশেষতঃ যদি তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ($180°$ বা $\pi$ ) হয়, তবে সেই কোণগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যায়। আমরা এখানে সেইগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই অভেদগুলি প্রমাণ করিতে পূর্বের পূরক ও সম্পূরক কোণগুলি ( Complementary and Supplementary angles ) সম্বন্ধে যে সকল সিদ্ধান্ত স্থাপিত হইয়াছে, সেইগুলি বিশেষ আবশ্যক হইবে।

(1) যদি $A+B+C=\pi=180°$ হয়, তবে উহাদের মধ্যে যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সম্পূরক হইবে। অর্থাৎ

$A+B=180°-C=\pi-C,\ B+C=180°-A,\ A+C=180°-B.$

অতএব, (i) $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C.$

(ii) $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C.$

(iii) $\sin C=\sin(A+B),$

(iv) $\cos C=-\cos(A+B),$

(v) $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C,$

(iv) $\cot(A+B)=-\cot C.$

(2) যদি $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°=\frac{\pi}{2}$ হয় ($A+B+C=180°$ হইতেও এই সম্বন্ধ পাওয়া যায়,), তবে $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}$ ও $\frac{C}{2}$ এর প্রত্যেকটি অপর দুইটির সমষ্টির পূরক কোণ হইবে। অর্থাৎ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90°-\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2},\ \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°-\frac{A}{2}$ এবং $\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90°-\frac{B}{2}.$

অতএব, (i) $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$,

(ii) $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$,

(iii) $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$,

(iv) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$,

$\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}$, ইত্যাদি।

উপরের 29 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি ও পূর্ব প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলির সাহায্যে নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ করা হইতেছে।

## উদাহরণমালা 6

উদা. 1. If $A+B+C=\pi$, **prove that**

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

[ C. U. '33, '37, '38, '53 ]

বামপক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$[\because A+B=180^\circ-C, \therefore \sin(A+B)=\sin C]$

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$[\because \cos C=-\cos(A+B)]$

$=2\sin C\times 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$.

উদা. 2. If $A+B+C=\pi$, **prove that**

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

বামপক্ষ $=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$= -2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$

$[\because \cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C]$

$= -2\cos C\{\cos(A-B) - \cos C\} - 1$

$= -2\cos C\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\} - 1$

$[\because -\cos C = \cos(A+B)]$

$= -2\cos C \times 2\cos A\cos B - 1$

$= -4\cos A\cos B\cos C - 1.$

উদা. 3. If $A+B+C=180°$, show that $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$.

$$\tan(2A+2B) = \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A\tan 2B},$$

এক্ষণে, $\because 2A+2B+2C = 360°$,

$\therefore 2A+2B = 360° - 2C$, $\therefore \tan(2A+2B) = \tan(360° - 2C)$

$= -\tan 2C.$

অতএব, $-\tan 2C = \dfrac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A\tan 2B}$

$\therefore \tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C + \tan 2A\tan 2B\tan 2C$

[ বজ্র গুণন দ্বারা ]

$\therefore \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

উদা. 4. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

[ C. U. '29, '50]

বামপক্ষ $= (\sin A + \sin B) + \sin C$

$= 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\left[\because \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

উদা. 5. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\left[\because \cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$$

$$\left[\because \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2},\ \therefore \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$$

উদা. 6. If $A+B+C=\pi$, prove that

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$ [C. U.]

$\because\ A+B+C=\pi,\ \therefore\ A+B=\pi-C,$

$\therefore\ \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

$$\therefore\ \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$$

বা, $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

[ বজ্র গুণন দ্বারা ]

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

উদা. 7. If $A+B+C=\pi$, show that

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$$

ডানপক্ষের $4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left(2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{\pi+A}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi-A+B-C}{4}+\sin\frac{\pi-A-B+C}{4}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{-2A}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{2B}{4}+\sin\frac{2C}{4}-\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1+\sin\frac{A}{2}\quad\left[\because\ \sin\frac{\pi}{2}=1\right]$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$$

উদা. 8. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

ডানপক্ষ $=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\right)$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{A}\left\{\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(\cos\frac{\pi+A}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\left[\because\ \cos\frac{\pi}{2}=0\right]$$

উদা. 9. **If $A+B+C=\pi$, prove that**

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

[ C. U. '36, '39 ]

$\because\ A+B+C=\pi=180°$, $\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$.

বা, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90°-\frac{C}{2}$

$\therefore\ \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$,

বা, $$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

বা, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

[ বজ্র গুণন দ্বারা ]

$\therefore\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

উদা. 10. **If $A+B+C=\pi$, prove that**

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

[C. U. ; Pat. U.]

$\because\ \cos 2A=1-2\sin^2A$, $\therefore\ 2\sin^2A=1-\cos 2A$

$\therefore\ \sin^2A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$. অনুরূপে $\sin^2B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$.

এক্ষণে, $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+1-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

$[\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$=2+\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=2+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=2+\cos C\times 2\cos A\cos B=2+2\cos A\cos B\cos C.$

**উদা. 11. If $A+B+C=\pi$, prove that**

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

[ C. U. '37, '47 ]

$\because \cos 2A=2\cos^2 A-1,$

$\therefore 2\cos^2 A=1+\cos 2A,$

$\therefore \cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A).$

অনুরূপে $\cos^2 B=\frac{1}{2}(1+\cos 2B).$

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$

$[\because A+B=\pi-C, \quad \therefore \cos(A+B)=-\cos C]$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=1-\cos C\times 2\cos A\cos B=1-2\cos A\cos B\cos C.$

$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

উদা. 12. If $A+B+C=180°$, show that

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

বামপক্ষ $=(\sin A+\sin B)-\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\left[\because \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

উদা. 13. If $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, prove that

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1$.

[C. U. '38]

$\because\ \cos 2A=1-2\sin^2 A,\quad \therefore\ 2\sin^2 A=1-\cos 2A$.

$\therefore\ \sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$. অনুরূপে $\sin^2 B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$.

এক্ষণে, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A+1-\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin C.\sin C$

$=1-\sin C\cos(A-B)+\sin C.\cos(A+B)$

$\left[\because A+B=\frac{\pi}{2}-C, \therefore \cos(A+B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C.\right]$

$=1-\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=1-\sin C\times 2\sin A\sin B=1-2\sin A\sin B\sin C.$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$

**উদা. 14.** If $A+B+C=180°$, shew that

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C.$$

$\because A+B+C=180°, \quad \therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°.$

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\cos\left\{90°-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right\}=\sin\frac{B+C}{2}.$

অনুরূপে, $\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{C+A}{2}$ এবং $\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}.$

এক্ষণে, প্রদত্ত বামপক্ষ $=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$$+\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin B+\sin C)+\tfrac{1}{2}(\sin C+\sin A)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\sin A+\sin B)=\sin A+\sin B+\sin C.$$

**উদা. 15.** If $A+B+C=2\pi$, show that

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$

$\because A+B+C=2\pi=360°, \therefore A+B=360°-C.$

$\therefore \cos(A+B)=\cos(360°-C)=\cos C.$

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos C.\cos C$

$=1+\cos C\cos(A-B)+\cos C\cos(A+B)$

$=1+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=1+\cos C\times 2\cos A\cos B=1+2\cos A\cos B\cos C,$

$\therefore\ \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$

**উদা. 16. If $A+B+C=\pi$, show that**

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ [ উদা. 1 দেখ ]

$=4\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

আবার, $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

[ উদা. 4 দেখ । ]

$$\therefore\ \text{প্রদত্ত বামপক্ষ}=\frac{32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 17. If $A+B+C=2\theta$, **prove that**

$$\cos^2\theta+\cos^2(\theta-A)+\cos^2(\theta-B)+\cos^2(\theta-C)$$
$$=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

$\because\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1,\quad \therefore\ \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta).$

এক্ষণে প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}\{(1+\cos 2\theta)+1+\cos(2\theta-2A)$
$+1+\cos(2\theta-2B)+1+\cos(2\theta-2C)\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{4+2\cos\frac{2\theta+2\theta-2A}{2}\cos\frac{2\theta-2\theta+2A}{2}+\right.$$
$$\left.2\cos\frac{4\theta-2B-2C}{2}\cos(B-C)\right\}$$

$=2+\cos(2\theta-A)\cos A+\cos(2\theta-B-C)\cos(B-C)$

$=2+\cos(B+C)\cos A+\cos A\cos(B-C)$

[ $\because\ 2\theta-A=B+C$ এবং $2\theta-B-C=A$ ]

$=2+\cos A\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}$

$=2+\cos A\times 2\cos B\cos C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 18. If $\cos A+\cos B+\cos C=0$, **show that**

$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C.$

বামপক্ষ $=4\cos^3 A-3\cos A+4\cos^3 B-3\cos B$
$+4\cos^3 C-3\cos C$

$=4(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)-3(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=4\times 3\cos A\cos B\cos C-3\times 0$ [ $\because\ \cos A+\cos B+\cos C=0,$

$\therefore\ \cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C=3\cos A\cos B\cos C$ ]

$=12\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 19. If $x+y+z=xyz$, **prove that**

$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$, এবং $z=\tan C$.

$\because\ x+y+z=xyz,$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C,$

বা, $\tan A-\tan A\tan B\tan C=-(\tan B+\tan C),$

বা, $\tan A(1-\tan B\tan C)=-(\tan B+\tan C)$

বা, $\tan A=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan(B+C)$

$$=\tan\{\pi-(B+C)\}$$

$$\therefore\ A=\pi-(B+C),\quad \therefore\ A+B+C=\pi.$$

অতএব, $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$

[ উদা. 3 দেখ ]

বা. $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$$=\frac{8\tan A\tan B\tan C}{(1-\tan^2 A)(1-\tan^2 B)(1-\tan^2 C)}$$

বা, $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$

বা, $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$

$\therefore\ x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$

$=4xyz$ [ উভয় পক্ষকে $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

**উদা. 20. If $x+y+z=xyz$, prove that**

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$, এবং $z=\tan C$.

$\because\ x+y+z=xyz,$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0\cdots\cdots(1)$

এক্ষণে, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

$=0$ [$\because$ (1) হইতে পাই লবটি$=0$]

$=\tan 180°$.

$\therefore\quad A+B+C=n\pi$ ( এখানে $n$ যে কোন অখণ্ড সংখ্যা ),

$\therefore\quad 3A+3B+3C=3n\pi$, বা, $3A+3B=3n\pi-3C$.

$\therefore\quad \tan(3A+3B)=\tan(3n\pi-3C)=-\tan 3C$.

আবার, $\tan(3A+3B)=\dfrac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}$.

$\therefore\quad \dfrac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}=-\tan 3C$,

$\therefore\quad \tan 3A+\tan 3B=-\tan 3C+\tan 3A\tan 3B\tan 3C$

$\therefore\quad \tan 3A+\tan 3B+\tan 3C=\tan 3A\tan 3B\tan 3C\cdots(2)$

এক্ষণে, $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$ [$\because x=\tan A$]

$\tan 3B=\dfrac{3\tan B-\tan^3 B}{1-3\tan^2 B}=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}$ [$\because y=\tan B$],

অনুরূপে $\tan 3C=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$. $\quad\therefore$ (2) হইতে পাই

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

## Exercise 6

If $A+B+C=\pi$ prove that :

1. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C$.
2. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C+4\sin A\sin B\cos C=1$.

3. $\cos A+\cos B-\cos C=4\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$

4. $\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin A\sin C\cos B.$

[ Pat. U. '40 ]

5. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

6. $\dfrac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$

7. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$ [C.U.'55]

8. $\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C.$

[ C. U. '30 ]

9. $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

10. $1-2\sin B\sin A\cos C+\cos^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B.$

11. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

[ C. U. '48 ]

12. $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$ [C. U. '49]

13. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$

[ Pat. '39 ]

14. $\dfrac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}+\dfrac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\dfrac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}=1.$

15. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

**16.** $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

[Pat. '42]

**17.** If $A+B+C=\pi$, and $\cos A=\cos B\cos C$, show that $\tan A=\tan B+\tan C$. [ C. U. '42 ]

If $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, **prove that :**

**18.** $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$.

**19.** $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$. [Pat. '39]

**20.** $\frac{\cos A+\sin B+\sin C}{\sin A+\cos B+\sin C}=\frac{1-\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}B}$.

**21.** If $A+B=C$, prove that $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$
$-2\cos A\cos B\cos C=1$. [Pat. '43]

**22.** If $A=B+C$, shew that $\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)$
$+\sin(A-B+C)=4\sin A\cos B\cos C$.

**23.** If $\alpha+\beta+\gamma=0$, prove that $1+2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\cos^2\alpha$
$=\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

**24.** If $A+B+C=2S$, shew that

$\sin(S-A)\sin(S-B)+\sin S\sin(S-C)=\sin A\sin B$.

**25.** If $A+B+C=180°$, and $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$, show that $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$. [ P. U. '45 ]

**26.** If $A+B+C+D=2\pi$, prove that

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A\tan B\tan C\tan D$$

**27.** If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$, show that $\cot A \cot B \cot C=\cot D$. [ C. U. '30 ]

**28.** If $\alpha$, $\beta$ and $\theta$ be the angles of a triangle, show that $\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\theta=1+2\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\theta$.

**29.** If A, B, C and D be the angles of a quadrilateral, prove that $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$
$+4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{1}{2}(A+D)=0$.

**30.** If $x+y+z=xyz$, prove that

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

[ U. P. B. '52 ]

———

# চতুর্থ অধ্যায়

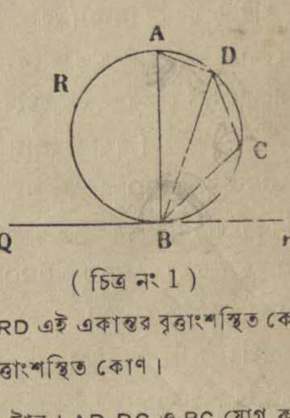
# GEOMETRY

# ( জ্যামিতি )

## উপপাদ্য 1

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn through the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

[ একটি বৃত্তের কোন স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী কোন জ্যাএর অন্তর্ভূত কোণ দুইটি যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণের সমান হইবে। ]




( চিত্র নং 1 )

BRD বৃত্তের B বিন্দুতে PQ একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু B হইতে BD জ্যা টানা হইয়াছে। মনে কর, BRD চাপের অনুবন্ধী চাপের উপর C একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) $\angle PBD = BRD$ এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ, এবং (ii) $\angle QBD = BCD$ এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

**অঙ্কন :** B বিন্দু হইতে বৃত্তের ব্যাস BA টান। AD DC ও BC যোগ কর।

**প্রমাণ :** (i) $\because$ ADB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, $\therefore$ $\angle ADB$ এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ABD + \angle BAD =$ এক সমকোণ।

আবার, $\because$ B বিন্দুতে PQ স্পর্শক এবং BA বৃত্তের ব্যাস,

$\therefore$ $\angle PBA =$ এক সমকোণ, অর্থাৎ $\angle ABD + \angle PBD =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ABD + \angle PBD = \angle ABD + \angle BAD$,

$\therefore$ $\angle PBD = \angle BAD$ এবং ইহা BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

(ii) ∵ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠BCD + ∠BAD = 2 সমকোণ।

আবার, ∠PBD + ∠QBD = 2 সমকোণ,

∴ ∠PBD + ∠QBD = ∠BCD + ∠BAD ;

কিন্তু ∠PBD = ∠BAD ( পূর্বে প্রমাণিত ),

∴ ∠CBD = ∠BCD এবং ইহা BCD একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি সমান হয়, সুতরাং PBD-কোণ BRD বৃত্তাংশস্থ BAD-কোণের সহিত সমান হওয়ায় উহা ঐ বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান হইল। অনুরূপে QBD-কোণও BCD বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান।

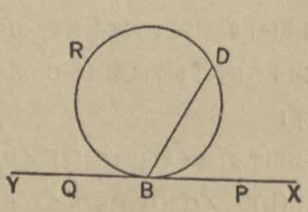
## বিপরীত উপপাদ্য

যদি বৃত্তের কোন জ্যাএর একটি প্রান্তবিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানায় ঐ রেখা ও জ্যাএর অন্তর্ভূত কোণ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[ ইহা উপপাদ্য 1 এর বিপরীত উপপাদ্য ]

BRD বৃত্তের BD একটি জ্যা এবং B বিন্দু দিয়া PQ এরূপ একটি সরলরেখা টানা হইয়াছে যে, ∠PBD = BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ ঐ বৃত্তটির স্পর্শক।




( চিত্র নং 2 )

**অঙ্কন :** B বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক XY টান।

**প্রমাণ :** ∵ XY বৃত্তের B বিন্দুতে স্পর্শক এবং BD স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যা,

∴ ∠XBD = BRD একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ,

কিন্তু ∠PBD = BRD বৃত্তাংশস্থ কোণ ( স্বীকার ),

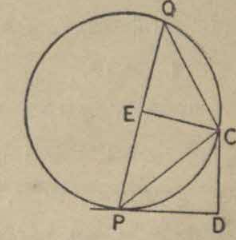
∴ ∠PBD = ∠XBD, ∴ PB ও XY একই সরলরেখা,

∴ PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক।

## বিবিধ উদাহরণ 1

উদা. 1. Show that the perpendiculars dropped on the tangent and the chord through the point of contact, from the middle point of either arc cut off by the chord, are equal.

[C. U. 1915]




( চিত্র নং 3 )

PD, বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং PQ স্পর্শবিন্দু-গামী জ্যা। PQ চাপের মধ্যবিন্দু C হইতে PD ও PQ-এর উপর যথাক্রমে CD ও CE লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD = CE.

PC ও QC যোগ কর।

প্রমাণঃ $\because$ চাপ PC = চাপ QC.

$\therefore$ $\angle PQC = \angle QPC$. আবার PD স্পর্শক ও PC একটি স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যা বলিয়া $\angle CPD$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PQC$. $\therefore$ $\angle CPD = \angle QPC$. এখন, $\triangle EPC$ ও $\triangle PCD$ এর, $\angle E = \angle D$ ( সমকোণ ), $\angle EPC = \angle CPD$ এবং PC বাহু সাধারণ, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ CD = CE.

উদা. 2. AB, a diameter of a circle, is produced to meet the tangent at C in D. Show that $\angle BDC + 2\angle BCD$ is a right angle.

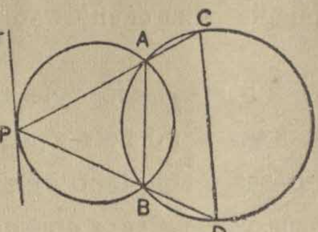
ABর মধ্যবিন্দু O লও, উহাই বৃত্তের কেন্দ্র হইল। OC ও BC যোগ কর।

প্রমাণঃ $\because$ OB = OC, $\therefore$ $\angle OCB = \angle OBC$. $\triangle BCD$র বহিঃস্থ $\angle OBC = \angle BCD + \angle BDC$. $\therefore$ $\angle OCB = \angle BCD + \angle BDC$. উভয় দিকে $\angle BCD$ যোগ করিলে, $\angle OCB + \angle BCD = 2\angle BCD + \angle BDC$ ; কিন্তু CD স্পর্শক ও CO স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া $\angle OCB + \angle BCD$ অর্থাৎ সমগ্র $\angle OCD$ এক সমকোণ। $\therefore$ $\angle BDC + 2\angle BCD =$ 1 সমকোণ।

উদা. 3. Two circles intersect at A and B ; and through P, any point on the circumference of one of them, straight lines

PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P. [C. U. '35]

P বিন্দুতে APB বৃত্তের PT স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT ∥ CD. CD ও AB যোগ কর।



( চিত্র নং 4 )

প্রমাণ : ∵ PT স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, ∴ ∠APT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABP.

আবার, ∵ ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, ∴ বহিঃস্থ ∠ABP = বিপরীত অন্তঃস্থ ∠C.

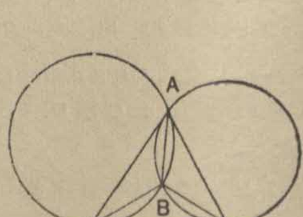
∴ ∠TPC = ∠PCD, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং PT ∥ CD.

উদা. 4. If two circles intersect, the angles subtended at the points of intersection by a common tangent are supplementary.

বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ স্পর্শক PQ উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠PAQ + ∠PBQ = 2 সমকোণ।

AP, BP, AQ, BQ, AB যোগ কর।



( চিত্র নং 5 )

প্রমাণ : ∠BPQ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠PAB,

এবং ∠BQP = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠BAQ.

∴ সমগ্র ∠PAQ = ∠BPQ + ∠BQP.

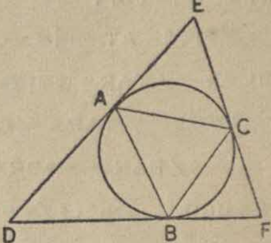
∴ ∠PAQ + ∠PBQ = ∠BPQ + ∠BQP + ∠PBQ = 2 সমকোণ।

* উদা. 5. Tangents are drawn at A, B, C to the circle circumscribing an acute-angled △ABC so as to form another triangle. Show that the angles of this triangle are respectively

supplements of twice the opposite angles of △ABC.
[C. U. 1939]

ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে DE, DF, EF স্পর্শক অঙ্কন করায় DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D কোণ 2∠Cর, E কোণ 2∠Bর এবং F কোণ 2∠Aর সম্পূরক।



( চিত্র নং 6 )

প্রমাণ : ∠DAB = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ACB

এবং ∠DBA = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ACB,

∴ ∠DAB + ∠DBA = 2∠ACB.

এখন, △ABDর

∠D + ∠DAB + ∠DBA = 2 সমকোণ,

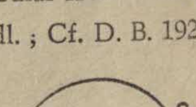
∴ ∠D + 2∠ACB = 2 সমকোণ।

সুতরাং ∠D, 2∠Cর সম্পূরক হইল।

অনুরূপে ∠E = 2∠Bর সম্পূরক এবং ∠F = 2∠Aর সম্পূরক।

উদা. 6. A chord AB of a circle bisects the angle between the diameter through A and the perpendicular from A to the tangent at B. [C. U. '49 Addl. ; Cf. D. B. 1926]

মনে কর, AB বৃত্তটির একটি জ্যা এবং AC উহার একটি ব্যাস। বৃত্তের B বিন্দুতে BP একটি স্পর্শক এবং AP ⊥ BP.



( চিত্র নং 7 )

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠BAP = ∠BAC.

প্রমাণ : BC যোগ কর। ∠ABC অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। ∠ABP = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ACB.

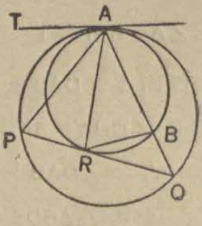
এখন △ABP ও △ABCর,

∠APB = ∠ABC ( প্রত্যেকে সমকোণ ),

∠ABP = ∠ACB. ∴ অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান, অর্থাৎ ∠BAP = ∠BAC.

উদা. 7. Two circles touch internally at A ; PQ, a chord of the outer, touches the inner at R. Prove that AR bisects the angle PAQ. [P. U. '33]

**Hints** :—মনে কর, AQ ভিতরের বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। BR যোগ কর এবং A বিন্দুতে AT উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক টান।



( চিত্র নং 8 )

প্রমাণ ঃ AT স্পর্শক এবং AR স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, ∴ $\angle TAR$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABR$.

অনুরূপে $\angle TAP = \angle Q$.

∴ $\angle PAR = \angle ABR - \angle Q$

$= \angle BRQ$ (∵ বহিঃস্থ $\angle ABR = \angle Q + \angle BRQ$)

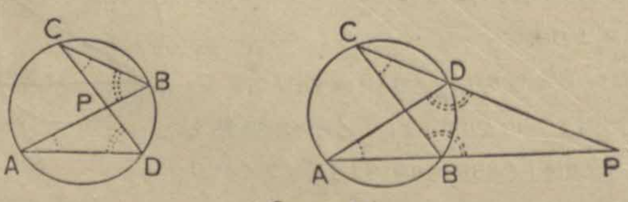
= একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle BAR$ (∵ PQ স্পর্শক).

∴ AR, $\angle PAQ$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

## উপপাদ্য 2

If two chords of a circle intersect, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

[ কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে। ]



( চিত্র নং 9 )

মনে কর, কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অন্তঃস্থ ( প্রথম চিত্রে ) কিংবা বহিঃস্থ ( দ্বিতীয় চিত্রে ) P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AP.PB = CP.PD.

**অঙ্কন :** AD ও BC যোগ কর।

**প্রমাণ :** PAD ও PBC ত্রিভুজের $\angle APD = \angle BPC$,

এবং $\angle PAD = \angle PCB$ ( একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ )

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle PDA = \angle PBC$.

∴ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ,

$\therefore \quad \frac{AP}{PC} = \frac{PD}{PB}, \quad \therefore \quad AP.PB = PC.PD.$

**অনুসিদ্ধান্ত :** (1) যদি কোন বৃত্তের AB জ্যা ও PQ স্পর্শক বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $AP.PB = PQ^2$ হইবে।

**প্রমাণ :** [ এখানে প্রথমে উপরের উপপাদ্যটি প্রমাণ করিবে। ] এক্ষণে দেখা যায় যে CD জ্যা AB হইতে দূরে পরিধির দিকে ক্রমশঃ যত সরিয়া যাইবে, C ও D বিন্দু ক্রমশঃ তত পরস্পর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে। এইরূপে যখন C ও D বিন্দু মিলিয়া যাইবে, তখন PC ও PD অংশদ্বয় সমান হইবে।

মনে কর, CD চাপের উপর Q বিন্দুতে গিয়া C ও D মিলিয়া গেল। অতএব, তখন PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক এবং PQ = PC হইল।

$\therefore \quad AP.PB = PC.PD = PC.PC = PC^2 = PQ^2.$

(2) যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে PBA ও PQ এরূপ দুইটি সরলরেখা টানা হয় যাহাতে $AP.PB = PQ^2$, তবে PQ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

**প্রমাণ :** যদি PQ বৃত্তের স্পর্শক না হয়, তবে উহাকে বর্ধিত করিলে উহা পরিধিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, R বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AB ও RQ জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করায়

$AP.PB = PR.PQ$, কিন্তু $AP.PB = PQ^2$ ( স্বীকার ),

$\therefore \quad PR.PQ = PQ^2, \quad \therefore \quad PR = PQ.$ অতএব R ও Q একই বিন্দু হইল, দুইটি পৃথক্ বিন্দু হইতে পারে না। ∴ PQ সরলরেখা একটিমাত্র

বিন্দুতে বৃত্তের সহিত মিলিত হইতে পারে বলিয়া উহা বৃত্তের স্পর্শক হইল।

[ উপপাদ্য 2-এর বিপরীত উপপাদ্য কি হইবে ? ঐ বিপরীত উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ]

## বিবিধ উদাহরণ 2

উদা. 1. P is any point in AB, a chord of a circle. Show how to draw a line PC from P to the circumference of the circle so that $PC^2 = PA.PB$. [C. U. '40]

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং উহার AB জ্যার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে OPর উপর লম্ব টান, উহা যেন বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। উহাই উদ্দিষ্ট সরলরেখা। CPকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ : $\because OP \perp CD, \therefore PC = PD$.

এক্ষণে, $AP.BP = PC.PD = PC.PC = PC^2$.

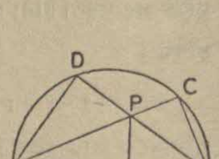
উদা. 2. A semi-circle is described on AB as diameter, and any two chords AC and BD are drawn intersecting at P. Show that $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. [C. U. '37 ; D. B. '39]

Hints : $PM \perp AB$ টান।

ADPM চতুর্ভুজের, $\angle D + \angle M = 2$ সমকোণ,

$\therefore$ উহা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এক্ষণে যেহেতু ADPM বৃত্তের জ্যা DP ও AM বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \quad AB.BM = BD.BP \cdots\cdots (1)$.



( চিত্র নং 10 )

অনুরূপে, PCBM বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া $AB.AM = AC.AP \cdots (2)$. এখন (1) ও (2) যোগ করিলে,

$AB.BM + AB.AM = BD.BP + AC.AP$,

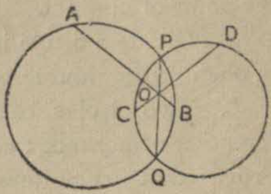
বা, $AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP$

অর্থাৎ $AB.AB = AC.AP + BD.BP$,

$\therefore \; AB^2 = AC.AP + BD.BP$.

✳ উদা. 3. Through any point in the common chord of two intersecting circles two chords are drawn, one in each circle. Show that the four extremities of these chords are concyclic.

মনে কর, উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা PQএর উপর O যে কোন একটি বিন্দু এবং উহার মধ্য দিয়া বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে AOB ও COD জ্যা টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, C, B, D একই বৃত্তস্থ।



( চিত্র নং 11 )

প্রমাণঃ PAQ বৃত্তের AB ও PQ জ্যা O বিন্দুতে ছেদ করায় $AO.BO = PO.QO$

আবার CPD বৃত্তে $CO.DO = PO.QO$. $\therefore AO.BO = CO.DO$.

$\therefore$ A, C, B ও D বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

উদা. 4. If two circles intersect, show that tangents drawn to them from any point in their common chord produced are equal. [C. U. 1934]

মনে কর, বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ জ্যা ABর বর্ধিতাংশের যে কোন T বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে TP ও TR স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $TP = TR$.

প্রমাণঃ TP স্পর্শক বলিয়া ABP বৃত্তে $TA.TB = PT^2$. অনুরূপে ABR বৃত্তে $TA.TB = TR^2$, $\therefore TP^2 = TR^2$, $\therefore TP = TR$.

## Exercise 1

1. A tangent is drawn parallel to a chord, show that the intercepted arc is bisected at the point of contact. [C. U. '45 ; D. B. '32]

2. A, B, C are points on a circle. BC produced and the tangent at A intersect at P. Prove that $\angle ACP = \angle PAB$.

3. Two circles touch each other internally at A and chords APQ, AXY are drawn. Show that $PX \parallel QY$. [C. U. '47 ]

4. Two circles touch each other internally and a straight line is drawn to cut them. Prove that the parts of it intercepted between the circles subtend equal angles at the point of contact. [C. U. 1924]

5. Divide a circle into two segments so that the angle in one may be double of the angle in the other.

6. Two circles touch internally or externally and from the point of contact two straight lines are drawn to cut them. Prove that the lines joining the points of section are parallel.

7. ABC is a triangle right-angled at C, from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse. Show that $CD^2 = AD.BD$. [C. U. '44]

8. Two straight lines AB and CD intersect at O so that $AO.BO = CO.DO$ ; prove that A, B, C, D are concyclic.

9. Two circles intersect at A and B ; show that AB produced bisects their common tangent. [C. U. '19]

10. Two chords AB and CD of a circle intersect at O outside it. If $OB = OD$, show that $AB = CD$.

11. ABC is a triangle in which AX, BY, CZ are the perpendiculars from the vertices to the opposite sides. If the perpendiculars meet at O, prove that

$AO.OX = BO.OY = CO.OZ$. [G. U. '48]

12. Show that the rectangle contained by the segments of any chord drawn through a given point within a circle is equal to the square on half the shortest chord which may be drawn through that point. [C. U. '49]

13. If three circles intersect one another, the three common chords are either concurrent or parallel.

14. A, B, C are three points on a straight line. Find the locus of points of contact of tangents from A to the circles passing through B and C. [C. U. '49]

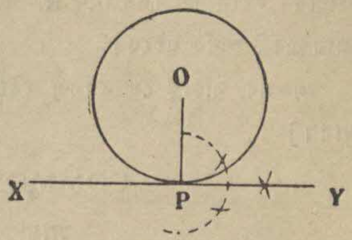
# CONSTRUCTION OF TANGENTS

## ( স্পর্শক অঙ্কন )

### সম্পাদ্য 1

Draw a tangent to a circle at a given point on the circumference.

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার পরিধিস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক আঁকিতে হইবে।




( চিত্র নং 12 )

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে XY⊥OP টান।

XY উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।

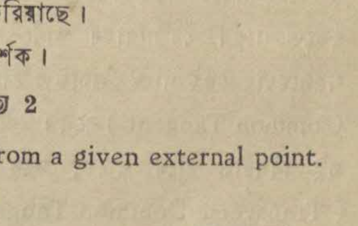
প্রমাণ : ∵ XY সরলরেখা OP ব্যাসার্ধের P বিন্দুতে OP-এর উপর লম্ব, ∴ XY ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

অতএব, XY ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

### সম্পাদ্য 2

Draw a tangent to a circle from a given external point.

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।




( চিত্র নং 13 )

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং OPকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর। এক্ষণে PQ উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।

প্রমাণ : OQ যোগ কর।

∵ OQP অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ ∠OQP এক সমকোণ।

অতএব, PQ সরলরেখা OQ ব্যাসার্ধের উপর Q বিন্দুতে লম্ব হওয়ায় PQ বৃত্তটির একটি স্পর্শক।

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** উপরের অঙ্কনে OPকে ব্যাস করিয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে উহা প্রদত্ত বৃত্তকে Qএর বিপরীত দিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, সেই বিন্দু R. এখন PR যোগ করিলে PR ঐ বৃত্তের আর একটি স্পর্শক হইবে।

অতএব, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।]

## COMMON TANGENT

## সাধারণ স্পর্শক

যদি একটি সরলরেখা দুইটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে তাহাকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক বলে। সাধারণ স্পর্শক **সরল** ও **তির্যক** দুই প্রকার হইতে পারে। যে সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত তাহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** ( Direct Common Tangent ) বলে। আর ঐ স্পর্শবিন্দু দুইটি যদি ঐ সরলরেখার দুই বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** ( Transverse Common Tangent) বলে।

### * সম্পাদ্য 3

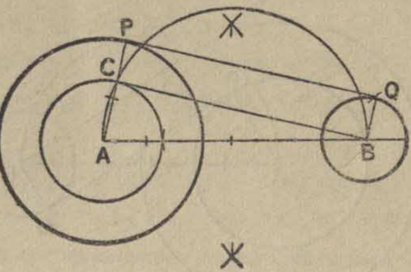
Draw a direct common tangent to two given circles.

A ও B যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও $r$ যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। এই বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

**অঙ্কন ঃ** AB যোগ কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরফল $(R-r)$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। B হইতে তৃতীয় বৃত্তের স্পর্শক BC অঙ্কিত কর। AC যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা

যেন বৃহত্তর বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। B হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া একই দিকে BQ ব্যাসার্ধ অঙ্কিত কর। PQ যোগ কর।

PQ বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।




( চিত্র নং 14 )

**প্রমাণ :** ∵ AP = R এবং AC = R − $r$, ∴ CP = $r$ = BQ.

আবার, CP ∥ BQ. ∴ BCPQ একটি সামান্তরিক, এবং উহার ∠CPQ = অনুরূপ ∠ACB = এক সমকোণ। ∴ BCPQ একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ ∠CPQ ও ∠PQB প্রত্যেকে এক সমকোণ। ∴ PQ উভয় বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।

[ **দ্রষ্টব্য :** C-র বিপরীত পার্শ্বে B হইতে ঐ তৃতীয় বৃত্তটির আর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। অতএব, AB-র অপর পার্শ্বে PQ-এর অনুরূপ আর একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। ]

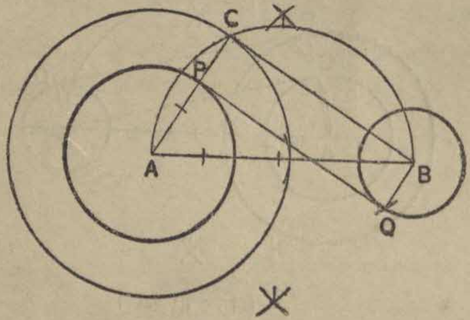
**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় সমান হইলে কিরূপে সাধারণ স্পর্শক আঁকিবে দেখাও। ]

## * সম্পাদ্য 4

Draw a transverse common tangent to two given circles.

A ও B যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও $r$ যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

**অঙ্কন ঃ** AB যোগ কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ দুইটির সমষ্টির ($R+r$ এর) সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তে BC স্পর্শক টান। AC যোগ কর, উহা যেন প্রদত্ত A-কেন্দ্রীয়




( চিত্র নং 15 )

বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে B হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া উহার বিপরীত দিকে BQ ব্যাসার্ধ টান। PQ যোগ কর। PQ উদ্দিষ্ট তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইল।

**প্রমাণ ঃ** $\because$ $AC=R+r$ এবং $AP=R$,

$\therefore$ $PC=r=BQ$, এবং $PC \parallel BQ$.

$\therefore$ PCBQ একটি সামান্তরিক, এবং উহার $\angle C$ এক সমকোণ হওয়ায় উহা একটি আয়তক্ষেত্র। $\therefore$ $\angle APQ=\angle PQB=$ এক সমকোণ।

$\therefore$ PQ উভয় বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** পূর্বের ন্যায় PQএর অনুরূপ আর একটি তির্যক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। অতএব, দুইটি বৃত্তের মোট চারিটি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। বৃত্তদ্বয়ের অবস্থান অনুসারে উহাদের 4টি, 3টি, 2টি বা 1টি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রীয় হইলে উহাদের সাধারণ স্পর্শক লুপ্ত হইয়া থাকে। তোমরা ঐ বিভিন্ন অবস্থানগুলি দেখাও। ]

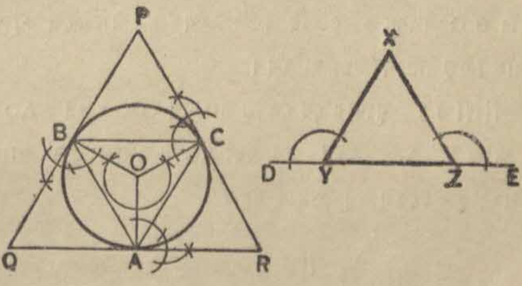
## Construction of regular figures in or about a given circle

### সম্পাদ্য 5

To construct a regular figure of 3 sides (i) in, or (ii) about a given circle.

(**প্রথম প্রণালী**)ঃ মনে কর, O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। উহার একটি (1) অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন**ঃ XYZ যে-কোন একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। YZ-কে উভয় দিকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত কর। OA যে-কোন একটি ব্যাসার্ধ লও। O বিন্দুতে ∠DYX-এর সমান করিয়া ∠AOB এবং ∠XZE-র সমান করিয়া ∠AOC অঙ্কিত কর। OB ও OC বৃত্তটিকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।




(চিত্র নং 16)

AB, BC, AC যোগ কর। এক্ষণে △ABC বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

**প্রমাণ**ঃ ∵ XYZ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ 60°,

∴ ∠XYD = ∠XZE = 120°. অতএব O বিন্দুতে ∠AOB = ∠AOC = 120° ; ∴ ∠BOC কোণও 120°.

এক্ষণে O কেন্দ্রস্থ কোণ তিনটি সমান বলিয়া চাপ AB = চাপ BC = চাপ AC.

∴ জ্যা AB = জ্যা BC = জ্যা AC ; ∴ △ABC সমবাহু।

(2) **অঙ্কন**ঃ পূর্বের ন্যায় অঙ্কন করিয়া A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তটির তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। উহারা যেন পরস্পর ছেদ করিয়া △PQR উৎপন্ন করিল। উহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

**প্রমাণ :** QP ও QR স্পর্শক বলিয়া ∠OBQ = ∠OAQ = এক সমকোণ।
∴ ∠AOB + ∠Q = 2 সমকোণ ; কিন্তু ∠AOB = 120°, ∴ ∠Q = 60°.
অনুরূপে ∠P ও ∠R প্রত্যেকে 60°. ∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

**( দ্বিতীয় প্রণালী ) :** প্রদত্ত বৃত্তটির একটি ব্যাস AP লও। P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং PO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর, ইহা প্রদত্ত বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC, AC যোগ কর। △ABC অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

**প্রমাণ :** △BOP ও △COP সমবাহু ত্রিভুজ, ∴ ∠BOC = 120°, ∴ ∠BAC = 60°. আবার, ∠BCA = ∠BPA ( একই বৃত্তাংশস্থ ) = 60°, ∴ △ABC সমবাহু।

এক্ষণে, A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক আঁকিলে পূর্বের ন্যায় পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজটি পাওয়া যাইবে।

**( তৃতীয় প্রণালী ) :** বৃত্তের যে কোন ব্যাসার্ধ OA লও। AO-র সমান AX, XC জ্যা আঁক। AC যোগ কর এবং AC-র সমান CB জ্যা আঁক। এক্ষণে △ABC সমবাহু হইবে। [ প্রমাণ সহজ ]

## সম্পাদ্য 6

To construct a regular figure of 4 sides (i) in or (ii) about a given circle.

[ সুষম চতুর্ভুজ বলিলে একটি বর্গক্ষেত্র বুঝায় তাহা তোমরা জান ]

O, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির (1) একটি অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** বৃত্তের যে কোন একটি ব্যাস AB লও এবং ইহার উপর লম্ব আর একটি CD ব্যাস অঙ্কিত কর।



( চিত্র নং 17 )

(1) A, C, B, D যোগ কর। এক্ষণে ACBD অন্তর্লিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

**প্রমাণ ঃ** ∵ O-কেন্দ্রস্থ কোণগুলি সমকোণ বলিয়া সমান,

∴ AD, AC, CB ও BD জ্যাগুলিও সমান।

আবার, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া ∠A, ∠B, ∠C, ∠D প্রত্যেকে সমকোণ, সুতরাং উহারা সমান।

∴ ACBD একটি বৃত্তস্থ সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

(2) A, C, B ও D বিন্দুতে বৃত্তের চারিটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। মনে কর, উহারা P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিল। PQRS বৃত্তের পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

**প্রমাণ ঃ** OD-র উপর SR ও AB লম্ব হওয়ায় SR ∥ AB ; অনুরূপে AS ∥ BR. ∴ ABRS একটি সামান্তরিক ; কিন্তু ∠BAS সমকোণ, ∴ ABRS একটি আয়তক্ষেত্র। অনুরূপে ABQP একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ SR = AB = PQ. অনুরূপে PS = CD = RQ ; কিন্তু AB = CD, ∴ PS = PQ, ∴ PQRS একটি সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** (1) বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত অষ্টভুজ অঙ্কন করিতে হইলে উপরের লম্ব ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ চারিটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ঐ দ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তকে যেন E, F, G, H বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে A হইতে আরম্ভ করিয়া পরিধিস্থ পর পর বিন্দুগুলি যোগ করিলেই বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে। [ প্রমাণ সহজ ]

আবার, ঐ বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে পরিলিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে।

## সম্পাদ্য 7

To construct a regular polygon in a circle.

মনে কর, বহুভুজের বাহুসংখ্যা $n$. এক্ষণে বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে $\frac{360^\circ}{n}$ এর সমান ∠AOB অঙ্কিত কর। মনে কর, A, B বৃত্তের ছেদবিন্দু। AB যোগ

কর। AB জ্যার সমান করিয়া পরপর BC, CD প্রভৃতি জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। এইরূপে অন্তর্লিখিত সুষম $n$-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

আবার, ঐ ছেদবিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে বৃত্তের পরিলিখিত সুষম $n$-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

এই প্রণালীতে বৃত্তে 3, 4 প্রভৃতি যে-কোন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম ক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

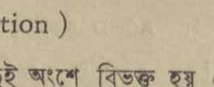
## মাধ্যমিক ছেদ ( Medial Section )

যদি একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে, একটি অংশ ও সমগ্র রেখার অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান, তাহা হইলে ঐ সরল রেখাকে ঐ বিন্দুতে **মাধ্যমিক ছেদে** বিভক্ত বলা হয়। ঐ ছেদবিন্দুকে **মাধ্যমিক ছেদবিন্দু** ( point of medial section ) বলে।

(a) To divide a given straight line in medial section.

মনে কর, AB সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** AB-এর উপর BC লম্ব টান এবং $BC = \frac{1}{2}AB$ কর। AC যোগ করিয়া উহা হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লও। AB হইতে AD-র সমান AX অংশ কাটিয়া লও। এক্ষণে, X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইল।



( চিত্র নং 18 )

**প্রমাণ :** $\angle B$ সমকোণ বলিয়া,

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = AC^2 - CD^2 = (AC + CD)(AC - CD)$$
$$= (AD + CD + CD).AD = (AD + AB).AD$$
$$[\because CD = BC = \tfrac{1}{2}AB, \quad \therefore \quad CD + CD = AB]$$
$$= AD^2 + AB.AD,$$

$\therefore$ $AB^2 - AB.AD = AD^2$, বা, $AB(AB - AD) = AD^2$,

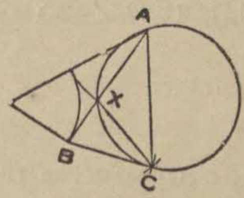
বা, $AB(AB - AX) = AX^2$ $[\because AD = AX]$

বা, $AB.BX = AX^2$, সুতরাং X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইয়াছে।

[ দ্রষ্টব্য ঃ যদি AB-কে মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত করিতে হয়, তবে AC-র বর্ধিতাংশ হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লইবে। তারপর BA-কে E পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করিবে যেন AE=AD হয়। E বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত হইবে। ]

(b) To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the vertical angle. [C.U. '20, '37]

**অঙ্কন ঃ** যে-কোন সরল রেখা AB লও। উহাকে X বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত কর, যেন $AB.BX=AX^2$ হয়। B ও X বিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া AX-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত চাপ আঁক। উহারা যেন C বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AC, BC ও CX যোগ কর। $\triangle ABC$ নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।



( চিত্র নং 19 )

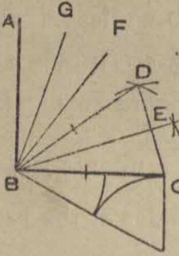
**প্রমাণ ঃ** $\triangle AXC$র পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর। এক্ষণে, $AB.BX=AX^2=BC^2$ ($\because$ BC=AX), সুতরাং AXC বৃত্তের C বিন্দুতে BC স্পর্শক। CX স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা। $\therefore$ $\angle BCX$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle CAX$. $\because$ AX=CX (অঙ্কন), $\therefore$ $\angle ACX=\angle CAX$. $\therefore$ সমগ্র কোণ $\angle ACB$ $=2\angle CAX=2\angle A$. আবার, $\angle BXC=\angle CAX+\angle ACX=2\angle A$; কিন্তু $\angle B=\angle BXC$ ($\because$ BC=AX=CX), $\therefore$ $\angle B=2\angle A$,

$\therefore$ $\angle B=\angle ACB$. $\therefore$ AB=AC $\therefore$ $\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ইহার $\angle B=\angle C=2\angle A$.

(c) Divide a right angle into five equal parts.

$\angle ABC$ সমকোণ, ইহাকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। BC বাহুকে লইয়া এমন একটি BCD সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন উহার $\angle C$ ও $\angle D$ প্রত্যেকে শীর্ষকোণ $\angle CBD$র দ্বিগুণ হয়। এক্ষণে

∠CBD কে BE দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। এখন এই ∠CBEর সমান করিয়া B বিন্দুতে ∠DBF ও ∠FBG অঙ্কিত কর। এক্ষণে সমকোণটি BE, BD, BF ও BG দ্বারা সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইল।




( চিত্র নং 20 )

**প্রমাণ ঃ** ∵ $\angle C = \angle D = 2\angle CBD$,

∴ $\angle C = 72°$, ∴ $\angle CBD = 36°$,

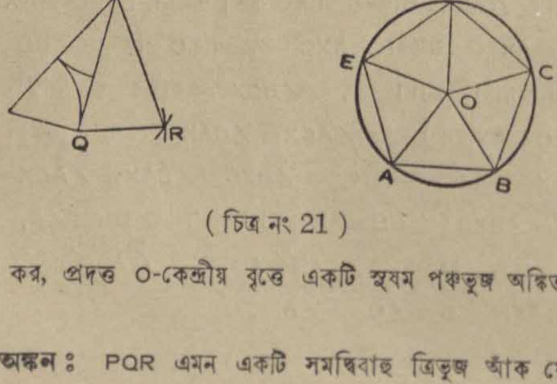
∴ $\angle CBE = \angle DBE = 18°$. সুতরাং,

$\angle DBF = \angle FBG = \angle CBE = 18°$.

অতএব, অবশিষ্ট $\angle ABG = 90° - 18° \times 4 = 18°$.

## সম্পাদ্য 8

To construct a regular pentagon ( পঞ্চভুজ ) (i) in, or (ii) about a given circle. [ C. U. '15, '34, '37, '47 ]




( চিত্র নং 21 )

মনে কর, প্রদত্ত O-কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন ঃ** PQR এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন উহার Q ও R কোণের প্রত্যেকটি P কোণের দ্বিগুণ হয়। OA যে-কোন ব্যাসার্ধ আঁক এবং O বিন্দুতে ∠AOB = ∠Q আঁক, উহার OB বাহু যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যোগ কর। AB-র সমান করিয়া BC, CD,

DE জ্যা আঁক এবং AE যোগ কর। এক্ষণে ABCDE বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

প্রমাণঃ ∵ $\angle Q=2\angle P$ এবং $\angle R=2\angle P$, ∴ $\angle P+\angle Q+\angle R =5\angle P$, ∴ $5\angle P=180°$, ∴ $\angle P=36°$, ∴ $\angle Q=72°$. এক্ষণে ∵ AB, BC, CD ও DE চারিটি সমান জ্যা,

∴ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 72°$.

∴ ঐ কোণগুলির সমষ্টি $=72° \times 4 = 288°$ ; কিন্তু O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি 360°, ∴ $\angle EOA = 360° - 288° = 72°$,

∴ AE জ্যাও অপর জ্যাগুলির সমান।

আবার ∵ $\triangle OAB$ সমদ্বিবাহু, ∴ $\angle OAB = \angle OBA$ ; এবং ∵ $\angle AOB = 72°$, ∴ $\angle OAB + \angle OBA = 180° - 72° = 108°$, ∴ $\angle OAB = \angle OBA = 54°$. এইরূপে চিত্রের প্রত্যেক ত্রিভুজের ভূমিকোণ $=54°$. ∴ পঞ্চভুজটির প্রত্যেক কোণ $=2\times 54° = 108°$. অতএব, ABCDE ঐ বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ

(2) A, B, C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে বৃত্তের পাঁচটি স্পর্শক PQ, QR, RS, ST ও PT অঙ্কিত করিলে যে PQRST পঞ্চভুজটি উৎপন্ন হইবে তাহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

প্রমাণ ঃ $\angle OAQ + \angle OBQ = 2$ সমকোণ, ∴ $\angle Q = \angle AOB$-র সম্পূরক। অনুরূপে $\angle P$, $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$ কোণগুলিও তাহাদের বিপরীত O বিন্দুস্থ কোণের সম্পূরক। কিন্তু O বিন্দুস্থ পাঁচটি কোণ সমান হওয়ায়, $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ প্রভৃতি কোণ পাঁচটিও সমান।

আবার, PO ও QO যোগ করিলে $\triangle AOQ$ ও $\triangle BOQ$ সর্বসম হইবে। ∴ $\angle AOQ = \angle BOQ = \frac{1}{2}\angle AOB$. অনুরূপে $\angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOE$. ∴ $\angle AOQ = \angle AOP$. ∴ $\triangle AOP$ ও $\triangle AOQ$ সর্বসম, ∴ $AQ=AP$, ∴ $PQ=2AQ$. অনুরূপে $QR=2BQ$, কিন্তু $AQ=BQ$, ∴ $PQ=QR$.

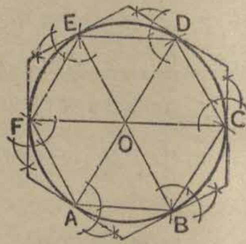
অনুরূপে PQRST-র সব বাহু সমান। ∴ উহাই পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

## সম্পাদ্য 9

To construct a regular figure of 6 sides (i) in, or (ii) about a given circle.

O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির একটি অন্তর্লিখিত ও একটি পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন :** OA যে-কোন ব্যাসার্ধ লও এবং AO-র সমান করিয়া AB, BC, CD, DE ও EF জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। AF যোগ কর। এক্ষণে ABCDEF বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ হইল।



( চিত্র নং 22 )

**প্রমাণ :** AO, BO, CO প্রভৃতি যোগ কর।

এক্ষণে AB, BC, CD, DE ও EF পাঁচটি জ্যা সমান বলিয়া উহাদের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণগুলিও সমান। আবার △AOB, △BOC প্রভৃতি সমবাহু বলিয়া AOB, BOC প্রভৃতি পাঁচটি কোণের প্রত্যেকটি 60° ; সুতরাং অবশিষ্ট AOF কোণের পরিমাণও 60° হইবে ( ∵ O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 360° )। ∴ AOF ত্রিভুজও সমবাহু। ∴ ষড়্‌ভুজটি সমবাহু হইল এবং ∠ABC, ∠BCD প্রভৃতি কোণগুলির প্রত্যেকটি 60 ডিগ্রির দ্বিগুণ বা 120° বলিয়া ষড়্‌ভুজটির কোণগুলিও সমান।

অতএব, ABCDEF হইল বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ।

(2) **অঙ্কন :** A, B, C, D, E, F বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের 6টি স্পর্শক আঁক। উহারা পরস্পর ছেদ করিয়া যে ষড়্‌ভুজটি উৎপন্ন করিবে তাহাই বৃত্তের পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ হইবে।

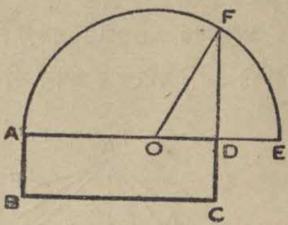
[ সম্পাদ্য 8-এর ন্যায় প্রমাণ দাও। ]

## সম্পাদ্য 10

To construct a square equal in area to a given rectangle.
[C. U. '30, '38, '47, '51 ; D. B. '33 ; G. U. '50, '52]

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** ADকে E পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন DE=DC হয়। AEকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক এবং CDকে বর্ধিত করিয়া অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ কর। DFএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে। [ বর্গক্ষেত্রটি আঁকিয়া দিবে ]




( চিত্র নং 23 )

**প্রমাণ :** Fএর সহিত AEর মধ্যবিন্দু O যোগ কর। OA=OF=OE.

$\because$ $\angle D$ সমকোণ, $\therefore$ $DF^2=OF^2-OD^2=OE^2-OD^2$
$=(OE+OD)(OE-OD)=(AO+OD).DE=AD.DE=AD.DC.$

$\therefore$ DFএর উপর বর্গক্ষেত্র=ABCD আয়তক্ষেত্র।

**অনুসিদ্ধান্ত :** (1) To construct a rectangle equal to a given square.

Hints : [ চিত্র আঁকিয়া লও ] মনে কর, প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $a$. $2a$ অপেক্ষা বৃহত্তর একটি সরলরেখা AB লও এবং ABকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। A বিন্দুতে $a$র সমান AC লম্ব টান এবং ABর সমান্তরাল CE টান, উহা যেন অর্ধবৃত্তকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। DF ⊥ AB টান। AF ও BF বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ADB$ সমকোণ এবং D হইতে অতিভুজ ABর উপর DF লম্ব,
$\therefore$ $AC^2=DF^2=AF.BF.$

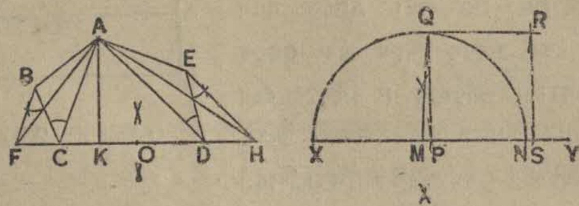
(2) To divide a given st. line so that the rectangle contained by the segments may be equal to a given square.

[ Hints : AB প্রদত্ত সরল রেখা ও P প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু লইয়া অনুসিদ্ধান্ত-(1) এর মত কর। ]

## সম্পাদ্য 11

To construct a square equal in area to a given rectilineal figure ( or a given polygon ).

মনে কর, ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।




( চিত্র 23 A )

**অঙ্কন :** AC ও AD যোগ কর। BF ∥ AC এবং EH ∥ AD টান, উহারা যেন CD-র বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে F ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। AF ও AH যোগ কর এবং AK⊥FH টান। AK হইল △AFHএর উচ্চতা। FHকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। XY সরলরেখা হইতে XP = FO এবং PN = AK কাটিয়া লও। XNকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, XN এর মধ্যবিন্দু M লও। PQ⊥XY টান, PQ যেন অর্ধবৃত্তের পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQএর উপর একটি বর্গক্ষেত্র PQRS অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

**প্রমাণ :** ∵ △ACF ও △ABC একই ভূমি ACর উপর এবং AC ও BF সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ∴ △ABC = △ACF.

অনুরূপে, △ADE = △ADH.

∴ △ABC + △ADC + △ADE = △ACF + △ADC + △ADH

∴ ক্ষেত্র ABCDE = △AFH = $\frac{1}{2}$FH.AK = FO.AK.

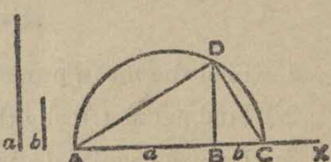
আবার, $PQ^2 = QM^2 - PM^2$ ( ∵ ∠P সমকোণ )
$= MX^2 - PM^2$ ( ∵ MX = QM = ব্যাসার্ধ )
$= (MX + PM)(MX - PM) = (MN + PM)(MN - PM)$
$= PX.PN = FO.AK =$ ক্ষেত্র ABCDE.

∴ PQ-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র = ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্র।

## সম্পাদ্য 12

To find the mean proportional between two given straight lines.

মনে কর, $a$ ও $b$ দুইটি প্রদত্ত সরল রেখা। ইহাদের মধ্য অনুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে



( চিত্র নং 24 )

**অঙ্কন ঃ** যে কোন সরল রেখা AX লও। ইহা হইতে $AB = a$ এবং $BC = b$ কাটিয়া লও। ACকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং BD⊥AC টান। BD যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এই BD রেখা AB ও BCর মধ্য অনুপাতী।

**প্রমাণ ঃ** AD ও DC যোগ কর। ∠ADC অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ।

∵ সমকৌণিক বিন্দু D হইতে অতিভুজ ACর উপর DB লম্ব,

∴ △ABD ও △DBC সদৃশ,

∴ $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$, ∴ $\frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$, ∴ BD, $a$ ও $b$-এর মধ্য অনুপাতী।

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** চিত্র 24 দেখ। মনে কর, AC ও AB প্রদত্ত রেখা এবং উহারা একটির উপর অপরটি এরূপে সমাপতিত যে উভয়ের A প্রান্ত মিলিত হইয়াছে। এরূপ ক্ষেত্রে AD রেখা AC ও ABর মধ্য অনুপাতী হইবে। আবার, CD রেখা CB ও CAর মধ্য অনুপাতী। ]

12. (a) Find the geometrically the value of $\sqrt{5}$.

[ চিত্র নং 24 দেখ ] $AC = 5$ একক লও। উহা হইতে $AB = 1$ একক কাটিয়া লও। AB ও ACর মধ্য অনুপাতী AD অঙ্কন কর।

এক্ষণে ∵ AD রেখা AB ও ACর মধ্য অনুপাতী,

∴ $AD^2 = AB.AC = 5.1$ বা 5 বর্গ একক।

∴ $AD = \sqrt{5}$ একক। অতএব AD দৈর্ঘ্যই $\sqrt{5}$ এর জ্যামিতিক মান।

[ দ্রষ্টব্য : $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3}$, সুতরাং 5 ও 3 এককের মধ্য অনুপাতীই $\sqrt{15}$ এর মান হইবে। $\sqrt{34}$ থাকিলে, $\sqrt{34} = \sqrt{6{\cdot}8 \times 5}$ ধরিতে হয়। ]

## Exercise 2

1. Find the mean proportional between 3″ and 4″.

2. Find geometrically the values of $\sqrt{35}$ and $\sqrt{26}$.

3. Draw a regular decagon in a given circle.

4. Draw a regular polygon of 12 sides in or about a given circle.

5. Describe a circle in, or about, a regular polygon.

6. Inscribe a square in a given circle.

7. Inscribe a regular octagon in a circle of radius 5 cm. [ C. U. '35 ]

8. Inscribe in a circle of radius 2 cm. a square and find its side by measurement and calculation. [ C. U. '51 ]

[ উত্তর = 2·82 cm- ]

9. Construct a regular hexagon circumscribing a circle of radius 1·5 inches. Measure a side of this hexagon. [ Pat. U. '50 ]

10. About a circle of radius 1″, describe an equilateral triangle. Draw a square whose area is equal to that of the triangle. Measure the sides of the square and the triangle. [ U. U. '51 ]

## Solid Geometry ( ঘন জ্যামিতি )

### কতিপয় সংজ্ঞা

1. **তল** বা পৃষ্ঠের ( surface ) দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই। অতএব তল দ্বিমাত্রিক।

2. তল দ্বারা বেষ্টিত দেশকে **ঘন** ( solid ) বলে। ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে ; সুতরাং ইহা ত্রিমাত্রিক।

3. তলের উপরিস্থিত যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তাহা যদি তলের সহিত সম্পূর্ণ মিলিয়া যায়, তবে ঐ তলকে **সমতল** ( plane বা plane surface ) বলে।

যে তল সমতল নহে, তাহাকে **বক্রতল** ( curve surface ) বলে।

[ **দ্রষ্টব্য** : তোমরা জান যে, একটি বিন্দুর গতি দ্বারা একটি রেখা উৎপন্ন হয়। অতএব দুইটি রেখার মিলন একটি বিন্দুতে হইবে।

সেইরূপ, রেখার গতি দ্বারা তল উৎপন্ন হয়, সুতরাং দুইটি তল একটি রেখায় মিলিত হয়। আবার, একটি তলের গতি দ্বারা একটি ঘন ( solid ) উৎপন্ন হয়। ]

4. যে সমস্ত সরলরেখা একই সমতলের উপর অবস্থিত তাহাদিগকে **সামতলিক** ( coplanar ) বলে।

5. দুইটি সরলরেখা দিয়া যদি কোন সমতল আঁকা না যায়, তবে রেখা দুইটিকে **অসামতলিক** ( skew বা non-coplanar ) বলে। এরূপ সরলরেখাদ্বয় বর্ধিত হইলেও কখন মিলিত হইবে না, অথচ উহারা সমান্তরাল নহে।

**উদাহরণ।** দুইটি পেন্সিল আড়াআড়ি ভাবে একটার উপরে আর একটা ধরিলে অসামতলিক রেখা হয়।

6. দুইটি **অসামতলিক সরলরেখার** ( skew straight lines ) **অন্তর্ভুক্ত কোণ** :

দুইটি অসামতলিক ( skew ) সরলরেখার মধ্যে একটি সরলরেখা তাহারই উপরিস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপরটির সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত

সরলরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে ঐ দুইটি skew সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ বলা হয়।

মনে কর, AB ও CD দুইটি skew সরলরেখা এবং AB এর উপরিস্থিত যে কোন P বিন্দু হইতে PQ ∥ CD টানা হইল। এক্ষণে AB ও PQ এর মধ্যস্থিত কোণ AB ও CD skew রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ হইবে।

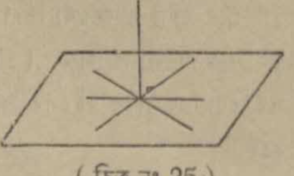
7. সামতলিক দুইটি সরলরেখা হয় পরস্পর মিলিত হইবে, না হয় সমান্তরাল হইবে।

8. যদি দুইটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত থাকে এবং উহাদিগকে দুই দিকেই বর্ধিত করিলে মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে সমান্তরাল বলা হয়।

9. একটি সরলরেখা ও একটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদিগকে দুই দিকেই বর্ধিত করিলে কখনও মিলিত না হয়।

10. দুইটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদের চারিদিকেই বর্ধিত করিলে কখনও মিলিত না হয়।

11. একটি সরলরেখা যদি একটি সমতলের সহিত এমনভাবে মিলিত হয় যে, ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ঐ সমতলস্থ প্রত্যেক সরলরেখার উপরেই ঐ সরলরেখাটি লম্ব, তবে ঐ সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপরে লম্ব ( perpendicular বা normal বলে। যে সরলরেখা বা সমতল ওলন দড়ির সমান্তরাল তাহাকে উল্লম্ব ( vertical ) বলা হয়।



( চিত্র নং 25 )

উল্লম্বের সহিত লম্ব সমতলকে অনুভূমিক ( horizontal ) বলে।

12. নিম্নের সিদ্ধান্তগুলি **স্বতঃসিদ্ধ** ( Axioms ) বলিয়া গণ্য করা হয় :—

(a) দুইটি সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে।

(b) একটি সরলরেখা কোন একটি সমতলের সহিত একটি বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে।

(c) দুইটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র সরলরেখা টানা যায়।

(d) একটি সমতলস্থ দুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে রেখা পাওয়া যায় তাহা অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও সমতলের উপর অবস্থিত থাকে।

(e) একটি সমতলকে তাহার উপরিস্থিত কোন সরলরেখাকে অক্ষ ধরিয়া ঘুরাইলে বিশ্বের সমস্ত বিন্দু দিয়াই এই সমতল যাইবে।

( সমতল বলিলে অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত সমতল বুঝিতে হইবে। )

(f) একটি সরলরেখা দিয়া অসংখ্য সমতল আঁকা যায়।

(g) একটি সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়।

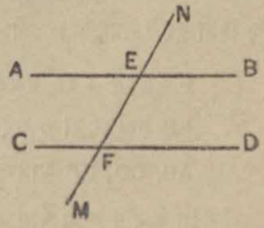
(h) দুইটি ছেদী সরলরেখার মধ্য দিয়া একটি এবং কেবল একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়।

(i) দুইটি পরস্পরছেদী সমতল একটি সরলরেখায় পরস্পর ছেদ করে এবং তাহার বাহিরের কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

## বিবিধ উদাহরণ 3

**উদা. 1.** If a straight line intersects two parallel straight lines, then the three st. lines are co-planar.

মনে করা যাক, AB এবং CD এই দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে MN সরলরেখা E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, CD, MN সামতলিক।




( চিত্র নং 26 )

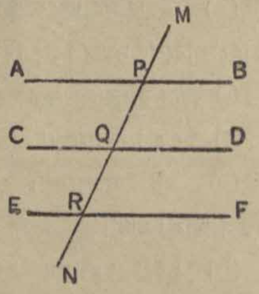
**প্রমাণ ঃ** যেহেতু AB এবং CD সমান্তরাল, অতএব তাহারা সামতলিক। এখন E এবং F যথাক্রমে AB এবং CD-র উপরে বিন্দু ; অতএব উহারা ঐ সমতলের উপরিস্থিত বিন্দু।

অতএব, EF সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ সমতলের উপর অবস্থিত [ স্বতঃসিদ্ধ (d) ] ∴ AB, CD, MN সামতলিক।

**উদা.** 2. Show that if three or more parallel straight lines intersect a given straight line, they are coplanar.

[ C. U. '21, 51 ]

মনে করা যাক AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি MN সরলরেখাকে যথাক্রমে P, Q, R, বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, CD, EF সামতলিক।




( চিত্র নং 27 )

**প্রমাণঃ** AB এবং CD সমান্তরাল বলিয়া ইহাদের মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায়। মনে কর, এই সমতল "$p$".

এখন P এবং Q বিন্দু দুইটি $p$-সমতলের উপর অবস্থিত, সুতরাং PQ সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ $p$-সমতলের উপর অবস্থিত। অতএব, R বিন্দু $p$-সমতলে অবস্থিত।

এখন AB এবং EF সমান্তরাল বলিয়া সামতলিক। মনে করা যাক, ইহারা আর একটি সমতল '$q$'-এর উপর অবস্থিত। অতএব R বিন্দু $q$ সমতলের উপর অবস্থিত। কিন্তু AB সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ R বিন্দু দিয়া দুইটি সমতল $p$ এবং $q$ আঁকা যায় না। [ স্বতঃসিদ্ধ (g) ]।

∴ $p$ এবং $q$ একই সমতল ;

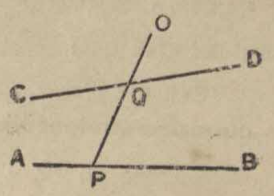
∴ EF সরলরেখা $p$-সমতলের উপর অবস্থিত হইবে।

∴ AB, CD, EF সামতলিক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে যদি AB, CD, EF এর সমান্তরাল আরও সরলরেখা MN-সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারাও AB, CD, EF এর সহিত সামতলিক হইবে।

**উদা. 3.** Through a given point draw a straight line which intersects two given straight lines not lying in one and the same plane with the given point. [ C. U. '12 ]

মনে করা যাক, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB ও CD দুইটি প্রদত্ত সরলরেখা। O এবং AB দিয়া একটি সমতল '$m$' আঁকা হইল। মনে করা যাক, এই সমতল CDকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OQ সরলরেখা $m$-সমতলের উপর অবস্থিত হইবে, অর্থাৎ OQ এবং AB সরলরেখা সামতলিক। অতএব, ইহারা P বিন্দুতে ছেদ করিবে। অতএব OQ সরলরেখাই নির্ণেয় সরলরেখা।



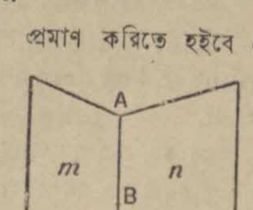
( চিত্র নং 28 )

**মন্তব্য :** OQ সরলরেখা AB-র সহিত সমান্তরাল হইলে ইহারা ছেদ করিবে না। সে ক্ষেত্রে উক্তপ্রকার কোন সরলরেখাই পাওয়া যাইবে না।

**উদা. 4.** Prove that the common sections of any three planes ( non-collinear ) meet at a point.

মনে করা যাক $m$, $n$, $p$ তিনটি সমতল। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহারা একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

**প্রমাণ :** $m$ এবং $n$ সমতল একটি রেখা ABতে ছেদ করিল এবং $m$ এবং $p$ সমতল CD রেখায় ছেদ করিল [স্বতঃসিদ্ধ (i)]। এখন AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে করা যাক এই বিন্দু O. অতএব, তিনটি সমতল O বিন্দুতে ছেদ করিল।



( চিত্র নং 29 )

[ **দৃষ্টান্ত :** ঘরের দুইটি দেওয়াল এবং মেঝে একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। ]

উদা. 5. Any three straight lines forming a triangle are co-planar.

মনে কর, AB, BC ও CA সরলরেখাত্রয় △ABC উৎপন্ন করিয়াছে। ∵ AB ও BC দুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া কেবল একটিমাত্র সমতল আঁকা যায়, ∴ AB ও BC সামতলিক। অতএব, A ও C বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাও ঐ সমতলেই অবস্থিত থাকিবে। ∴ △ABCর AB, BC, CA বাহুত্রয় সামতলিক।

উদা. 6. Draw a straight line to cut three given non-co-planar straight lines. [ C. U. '13 ]

মনে কর, AB, CD ও PQ তিনটি অসামতলিক সরলরেখা। উহাদিগকে ছেদ করে এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে। AB সরলরেখা দিয়া একটি সমতল আঁক। ABকে অক্ষ করিয়া ঐ সমতলকে এরূপে ঘুরাও যেন উহা CD ও PQকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে এবং XY যেন ABর সমান্তরাল না হয়। এক্ষণে, ∵ X, Y এবং AB একই সমতলে অবস্থিত,

∴ XY সরলরেখা ABকে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

অতএব, XY সরলরেখাই উদ্দিষ্ট সরলরেখা হইল।

উদা. 7. If a st. line outside a given plane is parallel to any st. line drawn in the plane, it is parallel to the plane itself. [ C. U. '31 ]

মনে কর, PQ সমতলের উপর AB একটি সরলরেখা, এবং ঐ সমতলের বহিঃস্থ একটি CD সরলরেখা ABর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD সরলরেখা PQ সমতলের সমান্তরাল।

প্রমাণ ঃ ∵ CD ও AB সমান্তরাল, ∴ উহারা একতলীয় এবং PQ সমতলের সহিত ঐ দ্বিতীয় সমতলটির ছেদ রেখা হইল AB. অতএব, CDকে বর্ধিত করিলে উহা কখন PQ সমতলকে ছেদ করিতে পারে না; কারণ, CD যদি PQ সমতলকে ছেদ করে তবে সেই ছেদবিন্দু ABর উপর অবস্থিত হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব ( ∵ AB ∥ CD )

∴ PQ সমতলের সহিত CD সমান্তরাল।

উদা. 8. If a st. line is paralle to each of two planes, prove that it is parallel to their line of intersection. [ C. U. 1934 ]

মনে কর, M ও N দুইটি সমতল, XY উহাদের ছেদরেখা এবং PQ সরলরেখা M ও N সমতলের প্রত্যেকটির সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ ∥ XY.

মনে কর, PQ সরলরেখা দিয়া M-সমতলের সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সমতলটি N-সমতলকে AB সরলরেখায় ছেদ করিল। অতএব, AB ও PQ সমান্তরাল হইল। ∴ M-সমতল ও PA-সমতল দুইটি সমান্তরাল এবং N-সমতল উহাদিগকে যথাক্রমে XY ও AB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে, ∴ XY ∥ AB.

এক্ষণে, ∵ XY ও PQ প্রত্যেকে ABর সমান্তরাল, ∴ PQ ∥ XY.

উদা. 9. AB and CD are two intersecting st. lines ; EF is another st. line parallel to CD and meeting AB at some point. Show that the three lines lie in one plane. [ C. U. '56 ]

মনে কর, AB ও CD-র ছেদবিন্দু O, এবং AB ও EF এর ছেদবিন্দু P. এক্ষণে, ∵ EF ∥ CD, ∴ CD ও EF সামতলিক ; মনে কর, উহারা M-সমতলে অবস্থিত। P, O বিন্দুদ্বয় M-সমতলে অবস্থিত বলিয়া PO সরলরেখা অর্থাৎ AB সরলরেখাও ঐ সমতলে অবস্থিত থাকিবে।

অতএব, AB, CD, EF একই সমতলে অবস্থিত।

উদা. 10. Two planes drawn one through each of two parallel st. lines cut one another in a st. line parallel to them. [ C. U. '22 ]

মনে কর, M ও N সমতল দুইটি যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল সরল-রেখাদ্বয়ের মধ্য দিয়া আঁকা হইয়াছে এবং উহারা পরস্পর PQ সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ সরলরেখা AB ও CDর সহিত সমান্তরাল।

প্রমাণঃ ∵ AB, CDর সহিত সমান্তরাল এবং CD N-সমতলে অবস্থিত, ∴ AB N-সমতলের সমান্তরাল। আবার, ∵ AB M-সমতলে অবস্থিত এবং M-সমতল ও N-সমতল PQ সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে, ∴ AB ও PQ সমান্তরাল ; কিন্তু AB ∥ CD, ∴ PQ ∥ CD.

∴ PQ, AB ও CD উভয়ের সমান্তরাল।

## Exercise 3

1. Show that any number of st. lines passing through a given point and intersecting a given st. line are co-planar. [ C. U. '54 ]

2. Straight lines which intersect one another mutually are co-planar.

3. If a plane cut two parallel planes, then the lines of section are parallel.

4. Show that through a given point P, a plane may be constructed parallel to each of two st. lines AB and CD, which do not lie in the same plane. [ C. U. '31 ]

5. The sides of a quadrilateral, of which the diagonals cut one another, lie in the same plane.

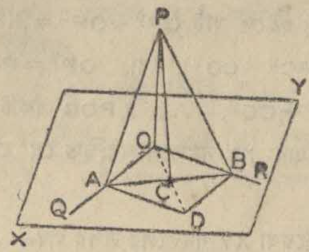
6. Draw a plane cutting two sides of a triangle proportionally.

## উপপাদ্য 1

If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is perpendicular to the plane in which they lie.

[ যদি একটি সরলরেখা অন্য দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার উপর উহাদের ছেদবিন্দুতে লম্ব হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি উক্ত সরলরেখাদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তাহার উপরেও লম্ব হইবে। ]

মনে কর, দুইটি ছেদী সরলরেখা OQ ও OR উভয়ে XY-সমতলে অবস্থিত এবং OP সরলরেখা OQ ও OR সরলরেখার উপরে O ছেদবিন্দুতে লম্ব।




( চিত্র নং 30 )

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP সরলরেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

**অঙ্কন :** O বিন্দু দিয়া XY-সমতলের উপর যে কোন সরলরেখা OD টানা হইল। D বিন্দু হইতে OQ ও OR এর সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া OADB সামান্তরিক আঁকা হইল। AB যোগ করা হইল, উহা যেন ODকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। PA, PB, PC যোগ করা হইল।

**প্রমাণ :** OADB সামান্তরিকের AB ও OD কর্ণদ্বয় C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে, ∴ PC, APB ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।

$\therefore \; PA^2+PB^2=2AC^2+2PC^2 \cdots\cdots(1)$

অনুরূপে, ∵ OC, $\triangle OAB$-র একটি মধ্যমা,

$\therefore \; OA^2+OB^2=2AC^2+2CO^2 \cdots\cdots(2).$

∴ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $(PA^2-OA^2)+(PB^2-OB^2)$

$=2(PC^2-CO^2) \cdots\cdots(3).$

আবার, $\because$ OA ও OB-র উপর PO লম্ব,

$\therefore$ $\angle POA$ ও $\angle POB$ প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ $PA^2 = OA^2 + OP^2$
এবং $PB^2 = OB^2 + OP^2$

$\therefore$ $PA^2 - OA^2 = OP^2$ এবং $PB^2 - OB^2 = OP^2 \cdots\cdots(4)$

অতএব, (3) ও (4) হইতে পাই $OP^2 + OP^2 = 2(PC^2 - CO^2)$,

বা, $2OP^2 = 2(PC^2 - CO^2)$, বা, $OP^2 = PC^2 - CO^2$,

$\therefore$ $PC^2 = OP^2 + CO^2$, $\therefore$ $\angle POC$ একটি সমকোণ,

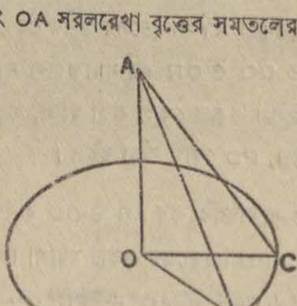
$\therefore$ O বিন্দুগামী এবং XY সমতলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখা OD-র উপর OP লম্ব হইল।

অতএব, OP সরলরেখা XY সমতলের উপর লম্ব।

## বিবিধ উদাহরণ 4

উদা. 1. From O, the centre of a circle, a perpendicular OA is erected to the plane. Show that all points on the circumference are equidistant from A. [ C. U. ]

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OA সরলরেখা বৃত্তের সমতলের উপর লম্ব। মনে করা




( চিত্র নং 31 )

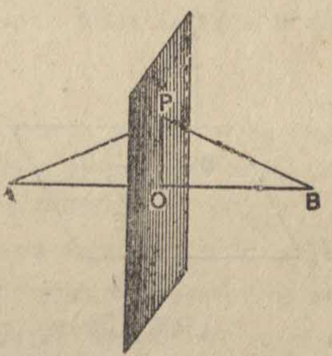
যাক B এবং C পরিধিস্থ যে-কোন দুইটি বিন্দু। AB, AC যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে AB = AC. OB এবং OC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণঃ ∵ OB ও OC বৃত্তের সমতলের উপরে অবস্থিত এবং OA ঐ সমতলের উপরে লম্ব, ∴ OA সরলরেখা, OB এবং OC-র উপরও লম্ব।

এখন OAB এবং OAC ত্রিভুজদ্বয়ের OB = OC, OA সাধারণ বাহু এবং $\angle AOB = \angle AOC = 1$ সমকোণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AB = AC.

উদা. 2. Find the locus of a point in space equidistant from two given points. [ C. U. '39, '47 ]

মনে কর, A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। AB যুক্ত করা হইল। মনে কর O, AB-র মধ্যবিন্দু। O বিন্দুর মধ্য দিয়া AB-র উপর লম্ব করিয়া একটি সমতল আঁকা হইল। এই সমতলই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।




( চিত্র নং 32 )

মনে কর, P ঐ সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু। PO, PA, PB যোগ কর।

প্রমাণঃ যেহেতু PO ঐ সমতলস্থ সরলরেখা এবং OB সমতলের উপর লম্ব। ∴ OB, PO রেখার উপরে লম্ব। এখন OAP এবং OBP ত্রিভুজদ্বয়ের AO = BO, PO সাধারণ বাহু এবং $\angle AOP = \angle BOP = 1$ সমকোণ।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

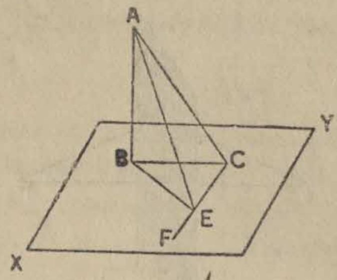
∴ AP = BP.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ঐ সমতলস্থ যে কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী।

∴ ঐ সমতলই উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ।

উদা. 3. AB is perpendicular to a plane and if from B, the foot of the perp., the line BE is drawn perpendicular to a line CF in the plane, show that CE is perp. to the plane of AE, BE. [ C. U. '50 ]

AB সরলরেখা XY সমতলের উপরে B বিন্দুতে লম্ব। XY সমতলের উপর CF যে-কোন একটি সরলরেখা। BE, CF-এর উপরে লম্ব টানা হইল। AE যুক্ত করা হইল।




( চিত্র নং 33 )

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CE সরলরেখা BE এবং AE সরলরেখাগামী সমতলের উপরে লম্ব।

AC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণঃ AB সরলরেখা BE এবং BC-র উপর লম্ব। এখন ABE সমকোণী ত্রিভুজের $AE^2=AB^2+BE^2$ এবং BEC সমকোণী ত্রিভুজের $EC^2=BC^2-BE^2$, $\therefore\ AE^2+EC^2=AB^2+BE^2+BC^2-BE^2$ $=AB^2+BC^2=AC^2$ [ $\because\ \angle ABC=1$ সমকোণ ]

∴ CE সরলরেখা AE সরলরেখার উপরে লম্ব। কিন্তু CE, BE-র উপর লম্ব, ∴ CE সরলরেখা AE এবং BE মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব।

উদা. 4. One and only one perpendicular can be drawn to a plane through a given point outside the plane.

মনে কর, M-সমতলের বহিঃস্থ একটি বিন্দু O. প্রমাণ করিতে হইবে O হইতে M-সমতলের উপর কেবল একটিমাত্র লম্ব আঁকা যায়।

প্রমাণ: যদি সম্ভব হয় মনে কর O হইতে ঐ সমতলের উপর OA, OB দুইটি লম্ব টানা হইল। এক্ষণে, মনে কর OA, OB দিয়া N-সমতল আঁকা হইল এবং উহা যেন M-সমতলকে CD রেখায় ছেদ করিল।

∵ OA, OB উভয়েই M-সমতলের উপর লম্ব, এবং CD উহাদের সহিত ঐ সমতলে মিলিত হইয়াছে, ∴ OA, OB উভয়েই CDর উপর লম্ব, কিন্তু CDর সহিত OA, OB একই সমতলে অবস্থিত হইয়া উভয়েই CDর উপর লম্ব হইতে পারে না। অতএব, O হইতে M-সমতলের উপর কেবল একটিমাত্র লম্ব টানা যায়।

উদা. 5. Prove that a point can be found in a plane equidistant from three given points outside the plane. State the exceptional case, if any. [ C. U. '36 ]

মনে কর, $m$ একটি প্রদত্ত সমতল এবং A, B ও C ইহার বহিঃস্থ তিনটি বিন্দু। AB-র মধ্যবিন্দু দিয়া AB-র সহিত লম্ব করিয়া একটি সমতল $p$ আঁকা হইল। অতএব, এই সমতলের প্রত্যেক বিন্দুই A, B হইতে সমদূরবর্তী। আবার, BC-র মধ্যবিন্দু দিয়া BC-র সহিত লম্ব করিয়া $n$-সমতল আঁকা হইল। $n$-এর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু B, C হইতে সমদূরবর্তী। ∴ $p$ ও $n$ সমতলদ্বয় যে সরলরেখায় ছেদ করিল তাহার উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী। মনে কর, এই সরলরেখাটি $m$-সমতলকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। অতএব, X-বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী হইল। ∴ X নির্ণেয় বিন্দু।

যদি $p$ ও $n$ সমতলের ছেদরেখা $m$-সমতলের সহিত সমান্তরাল হয়, তবে ঐরূপ সমদূরবর্তী বিন্দু হইতে পারে না।

## Exercise 4

1. Draw a plane perpendicular to a given straight line through a given point in it-

2. Prove that one and only one perpendicular can be drawn to a plane through a given point in it.

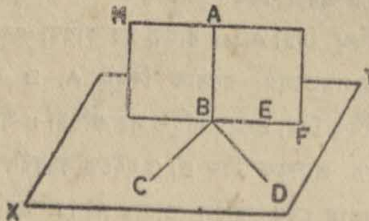
3. Prove that all points in space equidistant from two given points lie in a plane. [ C. U. '39 ]

4. Find the locus of a point in space equidistant from three given non-collinear points. [ C. U. '51 ]

## উপপাদ্য 2

All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point in it are co-planar.

[ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বসমূহ একতলীয়। ]




( চিত্র নং 34 )

মনে করা যাক, BC, BD, BE সরলরেখার প্রত্যেকেই AB সরলরেখার উপর B বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC, BD, BE একতলীয়।

অঙ্কন : দুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া একটি মাত্র সমতল আঁকা যায়। BC, BD সরলরেখা দিয়া XY সমতল এবং AB, BE সরলরেখা দিয়া HF সমতল আঁকা হইল। এই দুইটি সমতল BF সরলরেখাতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : যেহেতু AB সরলরেখা BC এবং BD-র উপর লম্ব, ∴ AB, XY-সমতলের উপর লম্ব। ∴ AB সরলরেখা BF-এর উপর লম্ব ; কিন্তু AB, BE-র উপর লম্ব, ∴ AB, BE, BF একই সমতলে অবস্থিত থাকিয়া BE এবং BF সরলরেখাদ্বয় AB-র উপর উহার একই বিন্দুতে লম্ব হইল, কিন্তু BE এবং BF একই সরলরেখায় অবস্থিত না থাকিলে ইহা অসম্ভব।

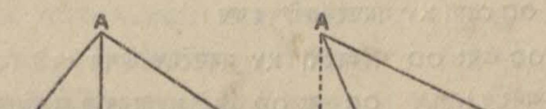
∴ BE, XY সমতলে অবস্থিত থাকিবে।

∴ BC, BD, BE তিনটিই XY সমতলে অবস্থিত।

∴ BC, BD, BE একতলীয়।

## বিবিধ উদাহরণ 5

উদা. 1. If a triangle revolves about its base, show that the vertex describes a circle. [ C. U. '19 ]




( চিত্র নং 35 )

মনে করা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, BCকে অক্ষ করিয়া △ABCকে ঘোরান হইলে A বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। AO, BC-র উপর লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

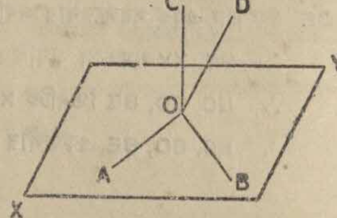
প্রমাণ : ∵ AO⊥BC, ∴ O, BC-র উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। যখন ত্রিভুজটি ঘোরান হইবে তখন AO, BC-র উপর সর্বদা O বিন্দুতে লম্ব থাকিবে।

∴ OA রেখা ঘুরিয়া একটি সমতল অঙ্কিত করিবে। আবার, যেহেতু A বিন্দু O হইতে সমদূরবর্তী থাকিবে, অতএব A একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে যাহার O কেন্দ্র এবং OA ব্যাসার্ধ হইবে।

উদা. 2. Prove that there cannot be more than three mutually perpendicular straight lines in space meeting at a point.

[ C. U. '32, '36, '48 ]

মনে কর, OA, OB, OC সরলরেখাত্রয় O বিন্দুতে পরস্পরের উপর লম্ব। যদি সম্ভব হয় তবে OD আর একটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন OA, OB, OD পরস্পরের উপর O বিন্দুতে লম্ব হয়। OA এবং OB ধারক XY সমতল আঁক।




( চিত্র নং 36 )

যেহেতু OC রেখা, OA এবং OB-র উপর লম্ব, ∴ OC রেখা সমতল XY-এর উপর লম্ব। আবার যেহেতু OD রেখা, OA এবং OB-র উপর লম্ব, ∴ OD রেখা XY সমতলের উপর লম্ব।

∴ OC এবং OD সরলরেখা XY সমতলের উপর একই বিন্দুতে লম্ব, কিন্তু ইহা অসম্ভব। ∴ OC এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

∴ তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।

উদা. 3. Prove that all straight lines drawn perpendicular from a given point to a system of parallel straight lines in space are co-planar.

[ C. U. '27 ]

মনে কর, AB, CD ও EF তিনটি শূন্যস্থ সমান্তরাল সরলরেখা এবং P বিন্দু হইতে PQ, PR ও PS যথাক্রমে AB, CD ও EF এর উপর লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে এই লম্বত্রয় একতলীয়।

এক্ষণে, মনে কর, P বিন্দু দিয়া প্রদত্ত সরলরেখা তিনটির সহিত সমান্তরাল করিয়া XY সরলরেখা টানা হইল। $\because$ XY ∥ AB, এবং PQ ⊥ AB, $\therefore$ PQ ⊥ XY. অনুরূপে PR ও PS প্রত্যেকে XYএর উপর P বিন্দুতে লম্ব। অতএব, PQ, PR ও PS একই সরলরেখা XYএর P বিন্দুতে XYএর উপর লম্ব হওয়ায় ঐ লম্বত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

উদা. 4. Show that there is one and only one point equidistant from four given points which do not lie in one plane and no three of which are in one st. line.

[N. U. '48]

মনে কর, A, B, C ও D চারিটি অসামতলিক প্রদত্ত বিন্দু এবং উহাদের কোন তিনটি এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটিমাত্র বিন্দু হইতে পারে।

**প্রমাণ ঃ** A ও B হইতে সমদূরবর্তী শূন্যস্থ বিন্দুগুলি ABর মধ্যবিন্দু দিয়া লম্বভাবে অঙ্কিত সমতলের উপর অবস্থিত থাকে। অনুরূপে B ও C হইতে এবং C ও D হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলি যথাক্রমে BCর ও CDর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া BC ও CDর সহিত লম্বভাবে অঙ্কিত সমতল দুইটির উপর অবস্থিত। এই সমতল তিনটি পরস্পর তিনটি সরলরেখায় ছেদ করে। আবার, ঐ তিনটি সরলরেখা ঐ সমতলত্রয়ের কেবল একটিমাত্র সাধারণ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুটি A, B, C, D হইতে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ A, B, C, D হইতে সমদূরবর্তী কেবল একটিমাত্র বিন্দু হইতে পারে।

## Exercise 5

1. How many horizontal lines can be drawn through a given point in a vertical line and how do they lie ?

[ C. U. 1916 ]

[ Hints : অসংখ্য অনুভূমিক সরলরেখা টানা যায় এবং উহারা উল্লম্বের সহিত ঐ বিন্দুতে লম্ব-সমতলের উপর অবস্থিত থাকিবে। ]

2. If a right angle revolves about one of its arms, then the other arm describes a plane.

3. Find the locus of a point equidistant from three non-collinear points.

4. Prove that the four angular points of a horizontal rectangle are equidistant from any point on the vertical line through the centre of the rectangle.

## উপপাদ্য 3

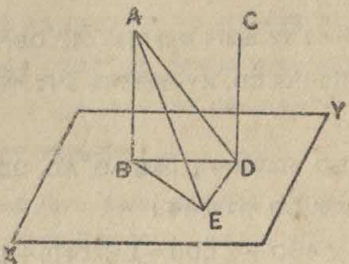
If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the same plane.

[ দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি যদি কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে অপরটিও ঐ সমতলের উপর লম্ব হইবে। ]

মনে কর, AB এবং CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা XY সমতলকে B ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং তাহাদের মধ্যে AB সরলরেখা XY সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD সরলরেখাও XY সমতলের উপর লম্ব।

**অঙ্কন ঃ** BD যোগ কর। XY সমতলে BD-র উপর লম্ব করিয়া DE একটি সরলরেখা আঁক। BE, AE, AD যোগ কর।




( চিত্র নং 37 )

**প্রমাণ ঃ** যেহেতু AB, XY সমতলের উপর লম্ব, ∴ AB সরলরেখা, BE এবং BD-র উপর লম্ব।

এখন, $AE^2 = AB^2 + BE^2$ [ ∵ ∠ABE = 1 সমকোণ ]

$= AB^2 + BD^2 + DE^2$ [ ∵ ∠BDE = 1 সমকোণ ]

$= AD^2 + DE^2$ [ ∵ ∠ABD = 1 সমকোণ ]

∴ ∠ADE = 1 সমকোণ। ∴ ED, AD রেখার উপর লম্ব।

কিন্তু ED, BD রেখার উপর লম্ব। ∴ ED রেখা, BD এবং AD সরলরেখা-ধারক সমতলের উপরে লম্ব।

কিন্তু CD সরলরেখা BD এবং AD ধারক সমতলের উপর অবস্থিত, ∴ ED রেখা CD-র উপরে লম্ব, অর্থাৎ CD রেখা ED রেখার উপরে লম্ব।

আবার, যেহেতু AB ॥ CD এবং BD ইহাদের ছেদক এবং

∠ABD = 1 সমকোণ, ∴ ∠CDB = 1 সমকোণ।

∴ CD রেখা BD এবং DE রেখার উপরে লম্ব। কিন্তু BD এবং DE, XY-সলতলের উপর অবস্থিত,

∴ CD রেখা XY সমতলের উপর লম্ব।

## বিপরীত উপপাদ্য

যদি দুইটি সরলরেখা একটি সমতলের উপরে লম্ব হয়, তবে তাহারা সমান্তরাল হইবে।

পূর্বের উপপাদ্য 3-এর মত প্রমাণ করা যায় যে, DE, AD-র উপর লম্ব। আবার, যেহেতু কল্পনানুসারে CD, XY-সমতলের উপর লম্ব ; ∴ ইহা DE-র উপর লম্ব।

∴ CD, AD, BD সামতলিক ; কিন্তু AB, AD, BD সামতলিক।

∴ AB এবং CD সামতলিক।

আবার, যেহেতু $\angle ABD + \angle CDB = 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ

$= 2$ সমকোণ,

∴ AB এবং CD সমান্তরাল।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** যদি XY সমতলের উপর AB লম্ব হয় এবং লম্বের পাদবিন্দু B হইতে ঐ সমতলস্থ যে-কোন সরলরেখা DE-র উপর BD লম্ব হয়, তবে AD সরলরেখাও DE-র উপর লম্ব হয়।

[ 37 নং চিত্রে EDকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $FD = ED$ হয় এবং BF, AF যোগ কর। $\triangle BED$ ও $\triangle BFD$ সর্বসম, ∴ $BE = BF$. আবার, $\triangle ABE$ ও $\triangle ABF$ সর্বসম, ∴ $AE = AF$. এক্ষণে, $\triangle ADE$ ও $\triangle ADF$এর AD সাধারণ বাহু, $DE = DF$ এবং $AE = AF$, ∴ $\angle ADE = \angle ADF = 1$ সমকোণ। ]

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** এই উপপাদ্যকে "The Theorem of the Three perpendiculars" বলে। ]

## বিবিধ উদাহরণ 6

উদা. 1. Straight lines in space which are parallel to a given straight line are parallel to one another.

[ C. U. '14, '19, '29, '35 ]

[ সঙ্কেত ঃ মনে করা যাক, AB এবং CD সরলরেখা উভয়ই PQ সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে AB এবং CD সমান্তরাল।

PQ রেখার যে-কোন বিন্দু Q হইতে PQ এর উপর লম্ব করিয়া XY সমতল আঁকা হইল, ইহা যেন AB ও CDকে B এবং D বিন্দুতে ছেদ করিল।

**প্রমাণঃ** যেহেতু AB ॥ PQ এবং PQ, XY-সমতলের উপর লম্ব, ∴ AB, XY সমতলের উপর লম্ব। তদ্রূপ CD সরলরেখাও XY সমতলের উপর লম্ব।

এখন যেহেতু AB এবং CD রেখা একই সমতল XY এর উপর লম্ব,

∴ উহারা পরস্পর সমান্তরাল। ]

উদা. 2. AB, AC are two straight lines intersecting at right angles, and from B a perpendicular BD is drawn to the plane of AB, AC. Show that AD is perpendicular to the line AC. [C. U. '38]

মনে কর, AB ও AC সরলরেখা দিয়া $m$-সমতল আঁকা হইল। BE⊥AB টান, সুতরাং BE ॥ AC হইল। ∵ BD $m$-সমতলের উপর লম্ব (স্বীকার), ∴ BD⊥BE. অতএব, BD ও AB উভয়ের সহিত BE লম্ব হইল। ∴ AB ও BD ধারক সমতলের উপর BE লম্ব। ∴ AC সরলরেখাও ঐ সমতলের উপর লম্ব। এক্ষণে, ঐ সমতলস্থ ADর সহিত AC সরলরেখা A বিন্দুতে মিলিত হওয়ায়, AC⊥AD হইল।

উদা. 3. If perpendiculars are drawn from an external point to a system of parallel straight lines in a plane, show that their feet lie in a straight line perpendicular to the parallel lines. [C. U. '27 ; D. U. '41]

মনে কর, $m$-সমতলের উপর অবস্থিত AB, CD, EF প্রভৃতি কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা এবং বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে উহাদের উপর যথাক্রমে OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ লম্বসমূহের পাদবিন্দুগুলি সমরেখ এবং ঐ রেখাটি প্রদত্ত সমান্তরাল সরলরেখাগুলির উপর লম্ব।

**প্রমাণঃ** মনে কর, O বিন্দু দিয়া AB, CD, EF প্রভৃতির সমান্তরাল করিয়া XY সরলরেখা টানা হইল। ∵ AB ॥ XY এবং OP⊥AB,

∴ OP⊥XY. অনুরূপে OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি XYএর উপর O বিন্দুতে লম্ব হইবে। অতএব, OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি একই সমতলে থাকিবে এবং ঐ সমতল XY-এর উপর লম্ব হইবে। মনে কর, ঐ সমতল $n$. এক্ষণে $n$-সমতল প্রদত্ত $m$-সমতলকে একটি সরলরেখায় ছেদ করিবে। ∵ OP, OQ, OR প্রভৃতি লম্বগুলি $n$-সমতলে অবস্থিত, ∴ উহাদের পাদবিন্দুগুলি $m$ ও $n$ সমতলের ছেদরেখার উপর অবস্থিত হইবে।

∴ P, Q, R প্রভৃতি পাদবিন্দুগুলি সমরেখ হইল।

∵ AB, CD, EF প্রভৃতির সহিত XY সমান্তরাল এবং XY $n$-সমতলের উপর লম্ব, ∴ AB, CD, EF প্রভৃতি রেখাগুলির প্রত্যেকে $n$-সমতলের উপর লম্ব এবং PQR···রেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত। অতএব, পাদবিন্দুগুলি সমরেখ এবং রেখাটি AB, CD, EF প্রভৃতির উপর লম্ব হইল।

## Exercise 6

1. Draw a straight line perpendicular to a given plane from an external point.

[ **Hints** : বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে $m$-সমতলের উপরিস্থ AB সরলরেখার উপর OP লম্ব টান। P বিন্দুতে ABর উপর $m$-সমতলে PQ লম্ব টান। এক্ষণে O হইতে PQ-এর উপর লম্ব টান। উহাই উদ্দিষ্ট লম্ব। ]

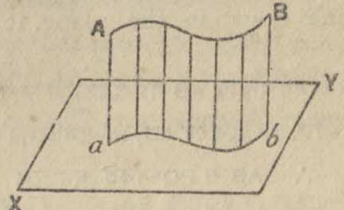
2. From an external point P, PO is drawn perpendicular to the plane XY and LM is any straight line in the plane XY. If PQ be drawn perpendicular to LM, show that OQ is perpendicular to LM. [ C. U. '43 ]

3. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from a given point upon any plane passing through a given straight line. [ D. B. '24 ]

4. If perpendiculars are drawn from any point to a system of parallel straight lines in space, then all the perpendiculars lie in a plane perpendicular to the parallel lines. [ C. U. '26 ]

## অভিক্ষেপ ( Projection )

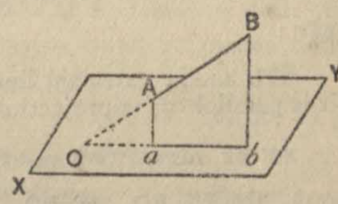
**সংজ্ঞা :** (1) কোন রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলি হইতে কোন সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে, পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ সমতলের উপর সেই রেখার **অভিক্ষেপ** (Projection) বলে।




( চিত্র নং 38 )

চিত্রে $ab$ রেখাটি XY সমতলের উপর AB রেখার লম্ব অভিক্ষেপ।

(2) কোন সরলরেখার ও সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের মধ্যস্থিত কোণকে ঐ সমতলের উপর সরলরেখাটির নতি বলে।




( চিত্র নং 39 )

মনে কর, XY সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ $ab$ ; সুতরাং AB ও $ab$ সামতলিক। মনে কর, AB ও $ab$ ( অথবা বর্ধিত AB ও $ab$ ) পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব B O $b$ কোণই XY এর উপর AB-র নতি।

[ **দ্রষ্টব্য :** "সমতলের উপর সরলরেখার অভিক্ষেপ সরলরেখা হয়।" ইহা একটি উপপাদ্য, ইহা পাঠ্য নহে বলিয়া ইহার প্রমাণ দেওয়া হইল না। ]

## বিবিধ উদাহরণ 7

**উদা. 1.** Find the length of the projection of a straight line AB on a plane XY in terms of AB and the angle which AB makes with XY. [C. U. '34]

মনে কর, XY সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ $ab$. $ab$র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, AB, XY-সমতলের সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন

করিল। এক্ষণে, AP ∥ $ab$ টান, AP যেন B$b$কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। অতএব, AP = $ab$ এবং ∠BAP = $\theta$ হইল।

$\therefore \quad ab = AP = AB \cos \theta.$

উদা. 2. If a straight line outside a given plane is parallel to any straight line drawn in the plane, it is parallel to the plane itself. [C. U. '31, '33]

মনে কর, $m$-সমতলের বহিঃস্থ AB সরলরেখা ঐ সমতলস্থ PQ সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, $m$-সমতলের সমান্তরাল।

∵ AB ∥ PQ, ∴ AB ও PQ একই সমতলে অবস্থিত। মনে কর ঐ সমতল $n$, সুতরাং $n$ ও $m$ সমতলদ্বয়ের ছেদ রেখা হইবে PQ. অতএব ABকে বর্ধিত করিলে উহা $m$-সমতলকে কখনও ছেদ করিতে পারে না ; কারণ, AB ঐ সমতলে যদি মিলিত হয়, তবে অবশ্যই PQ রেখায় মিলিত হইবে, কিন্তু AB ∥ PQ বলিয়া তাহা সম্ভব নহে। ∴ AB সরলরেখা $m$-সমতলের সমান্তরাল হইল।

উদা. 3. If a straight line is parallel to a plane, show that it is parallel to its projection on that plane. [C. U. '44]

মনে কর, AB সরলরেখা $m$-সমতলের সমান্তরাল এবং ঐ সমতলের উপর ABর অভিক্ষেপ PQ. AP, BQ যোগ কর। ∵ ABর অভিক্ষেপ PQ, ∴ ∠APQ ও ∠BQP প্রত্যেকে সমকোণ।

আবার, ∵ AB, $m$-সমতলের সমান্তরাল এবং AP ও BQ ঐ সমতলের উপর লম্ব, ∴ ∠PAB ও ∠ABQ প্রত্যেকে সমকোণ। ∴ ABQP একটি আয়তক্ষেত্র, ∴ AB ∥ PQ.

উদা. 4. If a straight line is parallel to each of two planes, prove that it is parallel to their line of intersecion. [C. U. '17, '33]

মনে কর, $p$ ও $q$ সমতল দুইটি পরস্পর AB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে এবং XY সরলরেখা ঐ সমতল দুইটির সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে XY ∥ AB.

XY-এর মধ্য দিয়া $p$-সমতলের সমান্তরাল করিয়া $m$-সমতল আঁক। মনে কর, উহা $q$-সমতলকে CD সরলরেখায় ছেদ করিল। অতএব CD ∥ XY হইল। এক্ষণে, ∵ $q$-সমতল $p$ ও $m$ দুইটি সমান্তরাল সমতলকে যথাক্রমে AB ও CD সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে, ∴ CD ∥ AB.

আবার, ∵ AB ও XY উভয়েই CDর সমান্তরাল, ∴ XY ∥ AB.

**উদা. 5.** Show that through a given point a plane may be constructed parallel to each of two skew lines. [ C. U. '31 ]

মনে কর, AB ও CD দুইটি প্রদত্ত অসামতলিক সরলরেখা ( skew lines ) এবং O প্রদত্ত বিন্দু।

O বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে AB ও CDর সমান্তরাল করিয়া OP ও OQ সরলরেখা টান। এখন OP ও OQ দিয়া অঙ্কিত সমতলই উদ্দিষ্ট সমতল।

**প্রমাণ:** ∵ AB ও CD যথাক্রমে OP ও OQ-এর সমান্তরাল, ∴ AB ও CD প্রত্যেকে OP ও OQ ধারক সমতলেরও সমান্তরাল।

**উদা. 6.** The angle which a straight line makes with its projection on a plane is less than that which it makes with any other straight line which meets it in that plane.

[ C. U. '18, '30, '31 ]

মনে কর, $m$-সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ $ab$ এবং BA যেন $ba$-এর সহিত ঐ সমতলে O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। $m$-এর উপর $Ob$-এর সমান OP সরলরেখা টান এবং BP ও $Pb$ যোগ কর।

**প্রমাণ:** ∵ $m$-এর উপর $Bb$ লম্ব, ∴ $\angle BbP$ সমকোণ।

∴ $Bb < BP$ ( অতিভুজ )। এক্ষণে, $\triangle BOb$ ও $\triangle BOP$র $Ob = OP$, OB বাহু সাধারণ, কিন্তু $Bb < BP$. ∴ $\angle BOb < \angle BOP$.

## Exercise 7

**1.** If a straight line is parallel to a plane, it is parallel to its projection on that plane.

**2.** The projection of the middle point of a straight-line on a plane is the mid point of the projection. [C. U. '16]

3. Prove that the length of the projection of a straight line on a plane = the length of the straight line × the cosine of the angle which it makes with the plane.

4. Show that the projection of a straight line on a plane cannot be greater than the line. What may be the mximum length of the projection ?

5. Prove that equal and parallel straight lines have equal and parallel projections on a plane. [ C. U. '23 ]

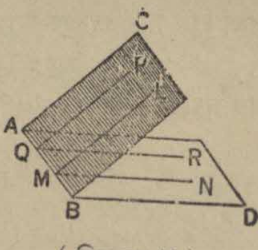
6. Show that if the projection of a given line on two intersecting planes be both straight lines, the given line is itself a straight line. [ C. U. '26 ]

[ **Hints :** কোন রেখা ও তাহার অভিক্ষেপ সামতলিক হয়। সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি দুইটি সমতলের ছেদরেখা হওয়ায় একটি সরলরেখা হইবে। ]

## Dihedral angle ( দ্বিতল কোণ )

দুইটি সমতল ছেদরেখায় মিলিত হইয়া দ্বিতল কোণ উৎপন্ন করে।

ছেদরেখার যে-কোন বিন্দু হইতে দুই সমতলের উপরে যথাক্রমে এমন দুইটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন এই দুই রেখা ছেদরেখার উপরে লম্ব হয়। এই দুই রেখার মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিতল কোণ বলে।



( চিত্র নং 40 )

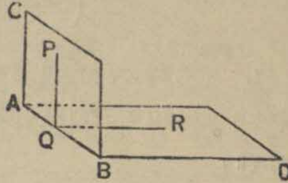
মনে করা যাক, BC এবং AD সমতল দুইটি AB রেখায় ছেদ করিয়াছে। AB রেখার যে-কোন বিন্দু Q হইতে যথাক্রমে BC এবং AD সমতলের উপর QP এবং QR সরলরেখা এমনভাবে আঁকা হইল যেন ইহারা AB-র উপর লম্ব হয়।

অতএব, $\angle PQR$ = সমতল দুইটির মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ। AB রেখার অন্য যে কোন বিন্দু M হইতে LM এবং MN সরলরেখাদ্বয় AB-র উপর লম্ব করিয়া BC এবং AD সমতলের উপরে আঁকা হইল।

$\therefore \angle LMN$ = দ্বিতল কোণ।

যেহেতু $PQ \parallel LM$ এবং $QR \parallel MN$,

$\therefore \angle PQR = \angle LMN$.




( চিত্র নং 41 )

**সংজ্ঞা :** দুইটি সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ সমকোণ হইলে সমতল দুইটিকে পরস্পরের উপর লম্ব বলে। [ চিত্র 41 ]

[ **দ্রষ্টব্য :** (i) একটি সরলরেখা কোন সমতলের উপর লম্ব হইলে ঐ সরলরেখাগামী যে-কোন সমতলই প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব হইবে।

(ii) দুইটি পরস্পরছেদী সমতলের অন্তর্ভূত দ্বিতল কোণ তাহাদের লম্বের ( normals ) অন্তর্ভূত কোণের সমান বা সম্পূরক হইবে।

(iii) একটি সমতল দুইটি সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করিলে অনুরূপ দ্বিতল কোণ দুইটি সমান হইবে। ]

## পঞ্চম অধ্যায়

# CO-ORDINATE GEOMETRY

## ( স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি )

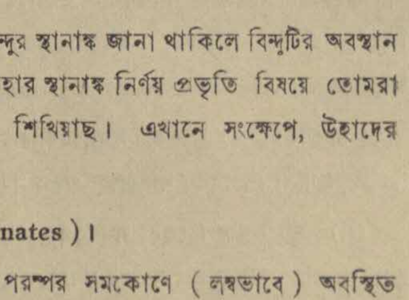
1. গণিতের যে শাখায় বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে **স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি** ( Co-ordinate Geometry ) বলা হয়।

স্থানাঙ্ক কাহাকে বলে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় অথবা উহার অবস্থান হইতে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় প্রভৃতি বিষয়ে তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে লেখ অঙ্কনের সময় শিখিয়াছ। এখানে সংক্ষেপে, উহাদের পুনরালোচনা করা হইতেছে।

2. (i) **স্থানাঙ্ক** ( Co-ordinates )।

তোমরা জান যে কোন সমতলে পরস্পর সমকোণে ( লম্বভাবে ) অবস্থিত দুইটি অসীম সরলরেখা টানিলে সমতলটি চারিটি অংশে বিভক্ত হয়।

মনে কর, কোন সমতলে XOX′ ও YOY′ অসীম সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ সরলরেখাদ্বয় নির্দিষ্ট বলিয়া O বিন্দুও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এখানে ঐ সরলরেখা দুইটির প্রত্যেকটিকে অক্ষ (axis) বলে। XOX′ সরলরেখাটিকে **ভুজাক্ষ** বা $x$-অক্ষ (axis of $x$) এবং YOY′ কে **কোটি-অক্ষ** বা $y$-অক্ষ ( axis of $y$ ) বলে। এই অক্ষদ্বয় হইতে ঐ সমতলস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বকে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক** বলে।




( চিত্র নং 1 )

(ii) **ভুজ ও কোটি।** ঐ রেখাদ্বয় সম্পর্কে ঐ সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইতে পারে। মনে কর, P ঐ সমতলের উপর যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে $x$-অক্ষের উপর PM এবং $y$-অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল। $y$-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব PN বা OM ( ∵ PN = OM ), এই OM দৈর্ঘ্যকে P বিন্দুর **ভুজ** ( **abscissa** ) এবং $x$-অক্ষ হইতে P-এর দূরত্ব PM দৈর্ঘ্যকে P এর **কোটি** ( **ordinate** ) বলে। কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটিকে একত্রে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক** ( **co-ordinates** ) বলা হয়। চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ( $x, y$ )। স্থানাঙ্ক লিখিবার সময় মনে রাখিবে যে প্রথমে বিন্দুটির ভুজ ও পরে উহার কোটি লিখিতে হয়। অতএব ( 3, 4 ) বিন্দু বলিলে বুঝিতে হইবে উহার ভুজ 3 একক এবং কোটি 4 একক দীর্ঘ।

(iii) **পাদ** ( **Quadrant** )। $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ সমতলটিকে চারিটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। প্রত্যেক অংশকে এক একটি **পাদ** ( quadrant ) বলা হয়। চিত্রে XOY কোণের মধ্যবর্তী অংশকে প্রথম পাদ, YOX′ কোণের মধ্যবর্তী অংশকে দ্বিতীয় পাদ, X′OY′ কোণের মধ্যস্থিত অংশকে তৃতীয় পাদ এবং Y′OX কোণের মধ্যস্থিত অংশকে চতুর্থ পাদ ধরা হয়।

(iv) **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক।** প্রচলিত প্রথা ( convention ) অনুসারে $y$-অক্ষের ডানদিকে $x$-অক্ষ বরাবর বা $x$-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্ব বা দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক ( positive ) এবং $y$-অক্ষের বামদিকের অনুরূপ দৈর্ঘ্য-গুলিকে ঋণাত্মক ( negative ) ধরিতে হয়।

আবার, $x$-অক্ষের উপরের দিকে $y$-অক্ষ বরাবর বা $y$-অক্ষের সমান্তরাল দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক এবং $x$-অক্ষের নীচের দিকে অনুরূপ দৈর্ঘ্যগুলিকে ঋণাত্মক ধরিতে হয়।

অতএব, চিত্রে দেখ যে, প্রথম পাদে অবস্থিত যে-কোন ( $x, y$ ) বিন্দুর ভুজ ($x$) ও কোটি ($y$) দুইটিই ধনাত্মক হইবে। দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন Q বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক ( $-x, y$) হইবে। তৃতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন $Q_1$ বিন্দুর ভুজ ও কোটি দুইটিই

ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(-x, -y)$ হইবে। চতুর্থ পাদে অবস্থিত যে-কোন $Q_2$ বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(x, -y)$ হইবে।

অতএব, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে উহা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা নির্দিষ্ট হইয়া যায়। কোন বিন্দুর অবস্থান জানা থাকিলে তাহার ভুজ ও কোটি নির্ণয় করিয়া উহাদের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নসহ একটি বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে ভুজ এবং পরে কোটি লিখিলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল।

O মূল বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই শূন্য বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক (0,0)।

$x$-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর কোটি শূন্য (0) হয় এবং $y$-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ শূন্য (0) হয়।

### 3. Cartesian co-ordinates :

আমরা পূর্বে XOX′ ও YOY′ সরলরেখা ( অক্ষ ) দুইটিকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত ধরিয়াছি। এরূপ স্থলে স্থানাঙ্কগুলিকে **rectangular** co-ordinates বলা হয়।

যদি ঐ XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত না হইয়া অন্য কোন কোণে নত থাকে, তবে উহাদিগকে **তির্যক অক্ষদ্বয় ( Oblique axes )** বলে। লম্ব অক্ষদ্বয় সম্পর্কে পূর্বে স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে যে সকল নিয়ম বলা হইয়াছে, তির্যক অক্ষদ্বয় সম্পর্কে তির্যকস্থানাঙ্ক ( **Oblique co-ordinates** ) সম্বন্ধে ঐ নিয়মগুলি প্রযোজ্য হইবে।

বিখ্যাত দার্শনিক **Descartes** এই দুই প্রকার স্থানাঙ্ক প্রচলিত করেন বলিয়া তাঁহার নামানুসারে **Cartesian** co-ordinates বলা হয়।

তির্যকস্থানাঙ্ক পাঠ্যাংশের অন্তর্গত নহে, সুতরাং আমরা এখানে সকল স্থানাঙ্ক লম্বস্থানাঙ্ক ( rectangular co-ordinates ) ধরিব।

### 4. Lengths of Segments ( দূরত্ব বা দৈর্ঘ্য ) :

কোন দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় অথবা কোন সরলরেখার কোন অংশের ( segment ) দৈর্ঘ্য নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(i) স্থানাঙ্কের সাহায্যে **মূলবিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব** নির্ণয়।

[ চিত্র নং 1 দেখ এবং এখানে চিত্র অঙ্কিত কর। ]

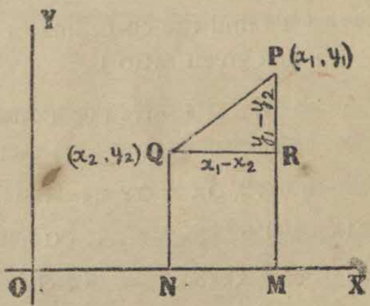
মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয় এবং P এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। মূলবিন্দু O হইতে X এর দূরত্ব অর্থাৎ OP সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। P হইতে OX এর উপর PM লম্ব টান এবং OP যোগ কর।

$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$, $\therefore$ $OM = x$ এবং $PM = y$.

$\therefore$ $OP^2 = OM^2 + PM^2 = x^2 + y^2$. অতএব, $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ii) স্থানাঙ্ক দ্বারা **দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়।**

মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q দুইটি প্রদত্ত বিন্দু, এবং বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$। PQ সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। [ চিত্র নং 2 দেখ ]। P ও Q হইতে OX এর উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব এবং Q হইতে PM এর উপর QR লম্ব টান।



( চিত্র নং 2 )

এক্ষণে, $OM = x_1$, $ON = x_2$, $PM = y_1$ এবং $QN = y_2$ হইল।

$\therefore$ $QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

এবং $PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$.

অতএব, PQR সমকোণী ত্রিভুজে

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** (i) উপরের সূত্রটির অন্তর্গত $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন ঐ সূত্রটি সর্বদা সিদ্ধ। অতএব, P ও Q বিন্দু যে-কোন পাদে অবস্থিত হউক না কেন PQ এর দূরত্ব নির্ণয়ে ঐ সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে। (ii) মূলবিন্দু হইতে P এর দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য এই

সূত্রে $x_2=0$, $y_2=0$ ধরিলে নির্ণেয় দূরত্ব পাওয়া যাইবে, কারণ তখন Q বিন্দু মূলবিন্দু Oএর সহিত মিলিত হইয়াছে বুঝিতে হইবে। ]

## 5. Sections of a finite straight line in a given ratio.

কোন একটি সরলরেখাকে কোন অনুপাতে ছেদ করিলে ( বিভক্ত করিলে ) ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। কোন নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখাকে দুই প্রকারে ছেদ করিয়া ( **অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত** করিয়া ) কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করা যায়।

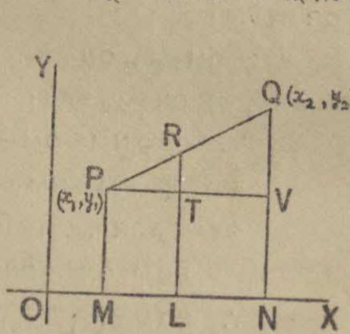
### 5. (a) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

( To find the co-ordinates of a point dividing a straight line in a given ratio ).

**অথবা** [ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হয়, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়। ]

মনে কর, OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ এবং PQ সরলরেখা R বিন্দুতে যেন $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। অতএব, $PR : RQ = m : n$. R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

(i) [ চিত্র নং 3 দেখ ]। মনে কর, R বিন্দু PQকে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে। OX এর উপর PM, QN ও RL লম্ব টান এবং OX এর সমান্তরাল PV টান, উহা যেন RL ও QN কে যথাক্রমে T ও V বিন্দুতে ছেদ করিল।




( চিত্র নং 3 )

এখন, $\because$ RT ∥ QV, $\therefore$ $\frac{PT}{TV} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$.

কিন্তু $PT = ML = OL - OM = x - x_1$,

এবং $TV = LN = ON - OL = x_2 - x$ ;

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}, \quad \therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

আবার, $\because$ $\triangle PRT$ ও $\triangle PQV$ সদৃশ

$$\therefore \frac{RT}{QV} = \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n} \left[ \because \frac{RQ}{PR} = \frac{n}{m}, \therefore \frac{RQ + PR}{PR} = \frac{n+m}{m}, \right.$$

$$\left. \text{বা,} \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{n+m}{m}, \therefore \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n} \right].$$

কিন্তু $RT = RL - TL = RL - PM = y - y_1$,

এবং $QV = QN - VN = QN - PM = (y_2 - y_1)$,

$$\therefore \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{RT}{QV} = \frac{m}{m+n},$$

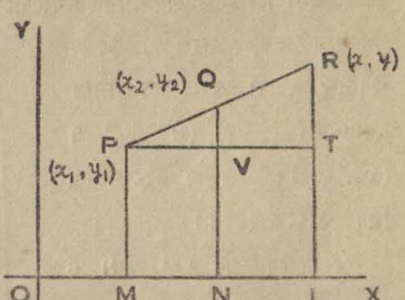
বা, $y(m+n) = m(y_2 - y_1) + y_1(m+n) = my_2 + ny_1$

$$\therefore y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left( \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$.

(ii) যদি R বিন্দু PQ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে (চিত্র নং 4 দেখ), তবে

$PR : RQ = m : n$ হইল।



(চিত্র নং 4)

এখন, $\because RT \parallel QV$,

$$\therefore \frac{PT}{TV} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n};$$

কিন্তু $PT = ML = x - x_1$,

এবং $VT = NL = x - x_2$,

$$\therefore \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n},$$

বা, $x(m - n) = mx_2 - nx_1$,

$$\therefore x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}.$$

আবার, $\triangle$PRT ও $\triangle$PQV সদৃশ বলিয়া $\frac{RT}{QV}=\frac{RP}{QP}=\frac{m}{m-n}$,

কিন্তু $RT=y-y_1$ এবং $QV=y_2-y_1$, $\therefore\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{m}{m-n}$,

বা, $y(m-n)=m(y_2-y_1)+y_1(m-n)=my_2-ny_1$

$$\therefore\quad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** যদি R বিন্দু PQকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ R যদি PQ এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m=n$ হইবে।

তখন $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{mx_2+mx_1}{m+m}=\frac{m(x_2+x_1)}{2m}=\frac{x_1+x_2}{2}$,

এবং $\frac{my_2+ny_1}{m+n}=\frac{y_2+y_1}{2}$ হইবে। অতএব, তখন R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$]

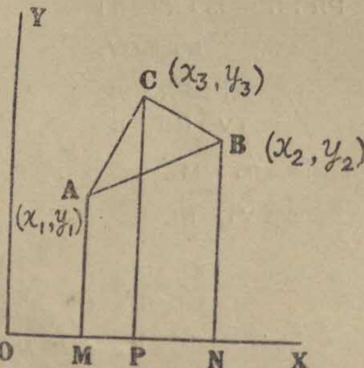
**6. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।**

অথবা, [ তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়। ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ও $(x_3, y_3)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$x$-অক্ষের উপর AM, BN ও CP লম্ব টান।

এক্ষণে, $\triangle$ABC = ট্রাপিজিয়ম AMPC + ট্রাপিজিয়ম PNBC − ট্রাপিজিয়ম AMNB.




( চিত্র নং 5 )

∵ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ উচ্চতা $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি,

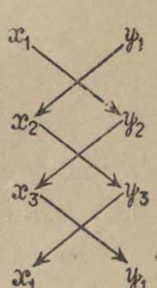
∴ $\triangle ABC$-র ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}MP(AM+PC)+\tfrac{1}{2}PN(PC+BN)-\tfrac{1}{2}MN(AM+BN)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_3-x_1)(y_1+y_3)+(x_2-x_3)(y_3+y_2)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** (a) মূলবিন্দু O সম্পর্কে প্রদত্ত ত্রিভুজের অবস্থান পাঁচ প্রকারের হইতে পারে। যথা, মূলবিন্দু O (1) ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ; (2) কোন কৌণিক বিন্দুতে অবস্থিত ; (3) কোন বাহুর উপর অবস্থিত, কিন্তু কৌণিক বিন্দুতে নহে ; (4) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের মধ্যে অবস্থিত ; (5) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার কোন একটি বিপ্রতীপ কোণের বাহুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইতে পারে।

(b) উপরের সূত্রটি মনে রাখার জন্য নিম্নের নিয়মটি জানিয়া রাখ।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির ভুজগুলি একস্তম্ভে নীচে নীচে লিখ এবং কোটিগুলি পাশাপাশি আর একস্তম্ভে নীচে নীচে লিখ। সর্বশেষে প্রথম শীর্ষের স্থানাঙ্কগুলি আবার লিখ ( পার্শ্বে চিত্র দেখ )। তৎপরে প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক ভুজকে পরবর্তী সারির কোটির সহিত গুণ কর ( তীর নির্দিষ্টভাবে )। আবার ঐরূপে প্রত্যেক কোটিকে পরবর্তী সারির ভুজের সহিত গুণ কর। এইবার প্রথম গুণফলগুলির সমষ্টি হইতে দ্বিতীয় গুণফলগুলির সমষ্টি বিয়োগ কর। এই বিয়োগফলের অর্ধেক হইবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল।



( চিত্র নং 5ক )

এইরূপে চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ প্রভৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

(c) প্রচলিত প্রথা ( convention ) এই যে, **কোন সামতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীতক্রমে লইলে উহার ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হয় এবং ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইক্রমে লইলে ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়।**

**7. তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত ( Condition for collinearity of three points ) ।**

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র হইতে তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত পাওয়া যায়। যদি তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য (0) হয়, তবেই বিন্দু তিনটি সমরেখ ( collinear ) হইয়া থাকে। মনে কর, বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ও $(x_3, y_3)$। অতএব নির্ণেয় সর্ত হইল, $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$.

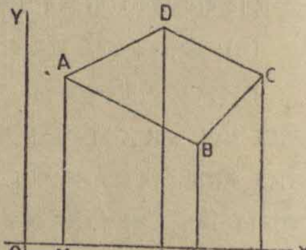
**8. শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।**

(Find the area of a quadrilateral whose vertices are given)

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ ও $(x_4, y_4)$।

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$x$-অক্ষের উপর AM, BN, CP, DQ লম্ব টান।



( চিত্র নং 6 )

এখন, চতুর্ভুজ ABCD = ট্রাপিজিয়ম AMQD + ট্রাপিজিয়ম DQPC − ট্রাপিজিয়ম AMNB − ট্রাপিজিয়ম BNPC

$$=\tfrac{1}{2}MQ(AM+DQ)+\tfrac{1}{2}QP(DQ+CP)-\tfrac{1}{2}MN(AM+BN)-\tfrac{1}{2}NP(BN+CP)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_4-x_1)(y_1+y_4)+(x_3-x_4)(y_4+y_3)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)-(x_3-x_2)(y_2+y_3)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}$$

[ সরল করিয়া পাওয়া যায় ]

**অনুসিদ্ধান্ত :** অনুরূপে $n$-ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল হইবে

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)\}.$$

[ দ্রষ্টব্য ঃ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যেও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। যে কোন কর্ণ যুক্ত করিলে চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়। ঐ দুই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি লইলেই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে।

এক্ষেত্রে, AC যুক্ত কর।

এক্ষণে, চতুর্ভুজ ABCD = △ABC + △ACD

$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{x_1(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2+x_1y_3-x_1y_4$$
$$+x_3y_4-x_3y_1+x_4y_1-x_4y_3\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+(x_4y_1-x_1y_4)\}]$$

## উদাহরণমালা 1

**উদা 1.** Find the distance of the following points from the origin : (*a*) $(-5, 12)$, (*b*) $(-4, -3)$, (*c*) $\{(m+n), (m-n)\}$.

(*a*) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

∴ এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}=\sqrt{169}=13.$

(*b*) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$

(*c*) এখানে প্রদত্ত বিন্দুর ভুজ $=m+n$ এবং কোটি $=m-n$.

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(m+n)^2+(m-n)^2}=\sqrt{2m^2+2n^2}$

$$=\sqrt{2(m^2+n^2)}.$$

**উদা. 2.** Find the distance between the points (0, 0) and $(a\cos\theta, a\sin\theta)$.

এখানে (0, 0) বিন্দুটি মূলবিন্দু, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}$

$$=\sqrt{a^2}\ [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]=a.$$

**উদা. 3.** Find the distance between the following pairs of points :—(i) (5, 3), (2, 2) ; (ii) (3, −2), (−4, 3) and (iii) $(ax, bx)$, $(by, -ay)$.

(i) $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব সূত্র হইল

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

∴ এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(5-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}.$

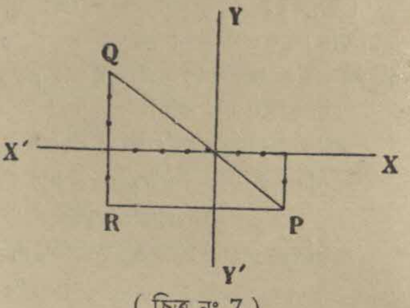
(ii) মনে কর, P $(3, -2)$ ও Q $(-4, 3)$ দুইটি বিন্দু।

এখানে $PR=7$ এবং

$RQ=5$

$\therefore \quad PQ=\sqrt{7^2+5^2}$

$=\sqrt{74}.$




( চিত্র নং 7 )

[ অন্য প্রকারে ] নির্ণেয় দূরত্ব

$=\sqrt{\{3-(-4)\}^2+\{-2-(3)\}^2}=\sqrt{(7)^2+(-5)^2}=\sqrt{74}.$

(iii) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(ax-by)^2+\{bx-(-ay)\}^2}$

$=\sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$

উদা. 4. Find the distance between the points whose co-ordinates are $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ and $(a\cos\phi, a\sin\phi)$.

মনে কর, P ও Q যথাক্রমে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

$$\therefore \quad PQ^2=(a\cos\theta-a\cos\phi)^2+(a\sin\theta-a\sin\phi)^2$$
$$=a^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\phi-2a^2\cos\theta\cos\phi$$
$$+a^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\phi-2a^2\sin\theta\sin\phi$$
$$=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)$$
$$-2a^2(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)$$
$$=a^2+a^2-2a^2\cos(\theta-\phi)=2a^2-2a^2\cos(\theta-\phi)$$
$$=2a^2\{1-\cos(\theta-\phi)\}=2a^2\times 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)$$
$$=4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta-\phi).$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=PQ=2a\sin\dfrac{\theta-\phi}{2}.$

উদা. 5. Find the co-ordinates of the middle points of the straight line joining the points $(6, 2)$ and $(-2, -4)$.

$\because$ $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$,

$\therefore$ এখানে মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{6-2}{2}, \frac{2-4}{2}\right)=(2, -1).$

উদা. 6. Prove that the triangle whose vertices are A (3, 1), B (9, 7) and C (−3, 7) is a right-angled isosceles triangle and find the length of the hypotenuse.

এখানে $AB^2=(3-9)^2+(1-7)^2=(-6)^2+(-6)^2=72,$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

আবার, $AC^2=\{3-(-3)\}^2+(1-7)^2=72, \ \therefore AC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$

$\therefore$ AB = AC, সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

এক্ষণে, $BC^2=\{9-(-3)\}^2+(7-7)^2=(12)^2=144.$

$\because$ $AB^2=72$ এবং $AC^2=72$, $\therefore AB^2+AC^2=144=BC^2,$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব △ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, এবং উহার অতিভুজ BC = 12.

উদা. 7. Find the co-ordinates of the point which divides the st. line joining the points (8, 12) and (−2, 7) internally in the ratio 3 : 2.

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(x, y)$।

এক্ষণে, $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, এবং $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ সূত্র হইতে পাই

$$x=\frac{3\times -2+2\times 8}{3+2}=\frac{-6+16}{5}=2,$$

এবং $y=\frac{3\times 7+2\times 12}{3+2}=\frac{21+24}{5}=9.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(2, 9).$

উদা. 8. Find the co-ordinates of a point which divides the st. line joining the points (4, 5) and (7, −1) externally in the ratio 4 : 3.

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(x, y)$; এখানে প্রদত্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 5) ও (7, −1) এবং প্রদত্ত অনুপাত = 4 : 3.

$\therefore$ সূত্র হইতে পাই $x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}=\frac{4\times 7-3\times 4}{4-3}=\frac{16}{1}=16,$

এবং $y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}=\frac{4\times -1-3\times 5}{4-3}=-\frac{19}{1}=-19.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(16, -19).$

উদা. 9. Show that the st. line joining the point (4, 3) and (8, 6) passes through the origin.

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)। মূলবিন্দু ও প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় সমরেখ হইলে ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত হইল এই যে,

$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$ হইতে হইবে।

এখানে বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (0, 0), (4, 3) ও (8, 6) ;

সুতরাং এখানে $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)$

$=(0\times8-0\times4)+(4\times6-8\times3)+(8\times0-0\times6)$

$=0+(24-24)+0=0.$

$\therefore$ ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ, অর্থাৎ (4, 3) ও (8, 6) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়াও যাইবে।

[ **বিকল্প প্রমাণ** ] : মনে কর, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 3) ও (8, 6)। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0).

একণে, $OP=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5,$

$OQ=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10,$

এবং $PQ=\sqrt{(4-8)^2+(3-6)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

$\therefore\ OP+PQ=10=OQ.$

অতএব, O, P ও Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[ দ্রষ্টব্য : OP+PQ=OQ হইলে, O, P, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। কারণ, যদি তাহা না হয়, তবে OPQ একটি ত্রিভুজ হইবে এবং ঐ ত্রিভুজে দুইটি বাহুর (OP ও PQ) সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব। ]

উদা. 10. Find the ratio in which the point (5, 4) divides the join of (3, 2) and (6, 5).

মনে কর, নির্ণেয় অনুপাত $=m:n.$

$\because$ (5, 4) বিন্দুটি (3, 2) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাকে $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে,

$\therefore \quad x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$ সূত্রটি হইতে পাই

$$5=\frac{m\times 6+n\times 3}{m+n}, \text{ বা } 6m+3n=5m+5n,$$

বা, $m=2n, \quad \therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{2}{1}. \quad \therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=2:1.$

[ দ্রষ্টব্য : (i) এখানে $\frac{m}{n}$ যদি ঋণাত্মক হইত অর্থাৎ যদি $\frac{m}{n}=-\frac{2}{1}$ হইত, তবে বলিতে হইত যে, 2 : 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিয়াছে।

(ii) এখানে $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ হইতেও একই অনুপাত পাওয়া যাইত। ]

উদা. 11. If the points $(x, y)$ be equidistant from the points (2, 3) and $(-1, 2)$ then will $3x+y=4$.

$(x, y)$ ও (2, 3) বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$;

এবং $(x, y)$ ও $(-1, 2)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$\therefore$ এই দূরত্ব দুইটি সমান ( স্বীকার ),

$\therefore \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

বা, $(x+1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2,$

বা, $x^2+2x+y^2-4y+5=x^2-4x+y^2-6y+13,$

বা, $6x+2y=8, \quad \therefore \quad 3x+y=4.$

উদা. 12. The square of the distance between the points (3, 5) and $(x, 4)$ is 17 ; find the abscissa of the unknown point.

(3, 5) ও $(x, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(3-x)^2+(5-4)^2},$

সুতরাং ঐ দূরত্বের বর্গ $=(3-x)^2+(5-4)^2,$

$\therefore \quad (3-x)^2+1=17,$ বা $(3-x)^2=16$, বা $3-x=\pm 4,$

$\therefore \quad x=3\mp 4=-1$ বা 7.

$\therefore$ নির্ণেয় ভুজ $=-1$ বা 7.

উদা. 13. Prove that the points (3, 3), $(-3, -3)$ and $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ are the vertices of an equilateral triangle.

মনে কর, A, B ও C যথাক্রমে প্রদত্ত তিনটি বিন্দু।

একণে, $AB^2=(3+3)^2+(3+3)^2=72, \quad \therefore \quad AB=6\sqrt{2}$ ;

$$BC^2=(-3+3\sqrt{3})^2+(-3-3\sqrt{3})^2$$
$$=9+27-18\sqrt{3}+9+27+18\sqrt{3}=72,$$
$$\therefore \quad BC=6\sqrt{2}.$$

এবং $CA^2=(-3\sqrt{3}-3)^2+(3\sqrt{3}-3)^2=72, \quad \therefore \quad CA=6\sqrt{2}.$

$\therefore \quad AB=BC=CA.$ অতএব ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং প্রদত্ত বিন্দুগুলি ঐ সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

উদা. 14. Find the area of the triangle whose vertices are $(a, bc)$, $(b, ca)$ and $(c, ab)$.

$\because \quad \triangle$(ক্ষেত্রফল)$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$,

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{a(ca-ab)+b(ab-bc)+c(bc-ca)\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a).$$

উদা. 15. Find the area of the triangle whose vertices are $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ and (0, 0).

$\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\theta(\sin 3\theta-0)+\cos 3\theta(0-\sin\theta)+0(\sin\theta-\sin 3\theta)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta+0\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(3\theta-\theta)=\tfrac{1}{2}\sin 2\theta.$$

উদা. 16. Find the area of the quadrilateral the co-ordinates of whose angular points, taken in order, are (1, 2), (3, 4), (5, −1) and (4, −3).

এখানে $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,\quad x_4=4$ এবং

$y_1=2,\ y_2=4,\ y_3=-1,\ y_4=-3.$

$\therefore\quad \Delta=\frac{1}{2}\{(1\times4-3\times2)+(3\times-1-5\times4)+(5\times-3-4\times-1)$
$+(4\times2-1\times-3)\}=\frac{1}{2}(-2-23-11+11)=-12\frac{1}{2},$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=12\frac{1}{2}$ একক।

[ অনুচ্ছেদ 6 ($b$) অনুসারে করা সহজ। ]

উদা. 17. Show that the three points $(a, 0)$, and $(0, b)$ and $(1, 1)$ are collinear, if $a+b=ab$.

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে, যদি ঐ বিন্দু তিনটিকে শীর্ষবিন্দু করিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

এক্ষণে ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$

$=\frac{1}{2}\{a(b-1)+0(1-0)+1(0-b)\}=\frac{1}{2}(ab-a-b).$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি

$\frac{1}{2}(ab-a-b)=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $ab-a-b=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a+b=ab$ হয়।

উদা. 18. ($a$) Show that the four points (5, 2), (3, 7), (−1, 4) and (1, −1) are the angular points of a parallelogram.

মনে কর, A, B, C, D বিন্দু চতুষ্টয়ের স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে (5, 2), (3, 7), (−1, 4) এবং (1, −1)। যদি ACর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ হয় তবে, $h=\frac{5-1}{2}=2$, এবং $k=\frac{2+4}{2}=3$.

আবার, BDর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h_1, k_1)$ ধরিলে, $h_1=\frac{3+1}{2}=2$, এবং $k_1=\frac{7-1}{2}=3$.

$\therefore$ AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই বিন্দু। অর্থাৎ, A, B, C, D বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে যে চতুর্ভুজ পাওয়া যায়, তাহার AC ও BD

কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইতেছে। অতএব, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

[লক্ষ্য কর: কোন চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয় যখন উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। এই জ্যামিতিক সর্ত লইয়া উপরের অঙ্কটি প্রমাণ করা হইল।]

(*b*) Show that the four points A (3, 3), B (5, 5), C (6, 4) and D (4, 2), when joined in order, make up a rectangle.

এখানে, $AB^2 = (3-5)^2 + (3-5)^2 = 8$,

এবং $CD^2 = (6-4)^2 + (4-2)^2 = 8$, $\therefore$ $AB = CD$.

আবার, $BC^2 = (5-6)^2 + (5-4)^2 = 2$,

এবং $DA^2 = (4-3)^2 + (2-3)^2 = 2$, $\therefore$ $BC = DA$.

এক্ষণে, $AC^2 = (3-6)^2 + (3-1)^2 = 10$,

এবং $BD^2 = (5-4)^2 + (5-2)^2 = 10$, $\therefore$ $AC = BD$.

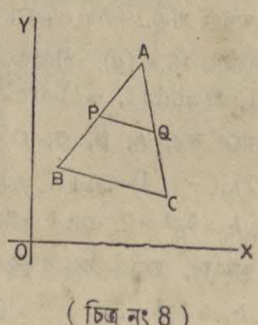
অতএব, দেখা যাইতেছে ABCD চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলি সমান ও কর্ণদ্বয়ও সমান। অতএব, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

[দ্রষ্টব্য: বর্গক্ষেত্র প্রমাণ করিবার সময়, ক্ষেত্রটির বাহুগুলি পরস্পর সমান ও কর্ণদ্বয় সমান দেখাইবে এবং রম্বস প্রমাণ করিবার সময় বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কর্ণ দুইটি সমান নহে দেখাইবে।]

**উদা. 19.** Prove that the join of the middle points of two sides of a triangle is equal to half the third side.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ও $(x_3, y_3)$ এবং P, Q যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $PQ = \frac{1}{2}BC$.




(চিত্র নং 8)

P এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$;

Q এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$.

$$\therefore \quad PQ=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_3}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}(x_2-x_3)^2+\tfrac{1}{4}(y_2-y_3)^2}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$

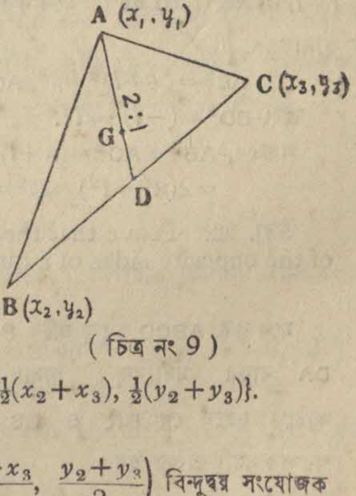
আবার, $BC=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$. $\therefore \quad PQ=\frac{1}{2}BC$.

উদা. 20. Find the co-ordinates of the centroid of the triangle whose vertices are $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$.

[ চিত্র নং 9 দেখ ]

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D লও এবং AD যোগ কর। AD কে G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করিলে G বিন্দু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র ( centroid ) হইবে। ঐ G বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।




( চিত্র নং 9 )

এখানে BC-র মধ্যবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক $\{\frac{1}{2}(x_2+x_3), \frac{1}{2}(y_2+y_3)\}$.
মনে কর, G ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

$\because$ G বিন্দু $A(x_1, y_1)$ ও D $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করিয়াছে,

$$\therefore \quad x=\frac{2\times\frac{1}{2}(x_2+x_3)+1\times x_1}{2+1}=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

এবং $y=\dfrac{2\times\frac{1}{2}(y_2+y_3)+1\times y_1}{2+1}=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

অতএব, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$.

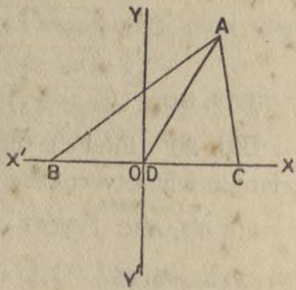
উদা. 21. Prove analytically that, in a triangle, the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square

on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side. [ Apollonius' Theorem ].

ত্রিভুজ ABCর মধ্যমা AD. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$.

মনে কর $BC=2l$. এখন BCকে $x$-অক্ষ ও উহার মধ্যবিন্দু Dকে মূলবিন্দু ধরিলে B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-l, 0)$ এবং $(l, 0)$ হয়। মনে কর A-র স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$.




( চিত্র নং 10 )

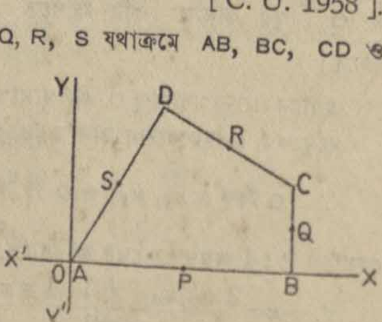
$\therefore\ AB^2=(\alpha+l)^2+\beta^2,\ AC^2=(\alpha-l)^2+\beta^2,\ AD^2=\alpha^2+\beta^2$ এবং $BD^2=(-l)^2=l^2$.

অতএব, $AB^2+AC^2=(\alpha+l)^2+\beta^2+(\alpha-l)^2+\beta^2$
$=2(\alpha^2+l^2)+2\beta^2=2(\alpha^2+\beta^2)+2l^2=2(AD^2+BD^2)$.

উদা. 22. Prove that the lines joining the middle-points of the opposite sides of a quadrilateral bisect each other. [ C. U. 1958 ].

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজটির P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে PR ও QS পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

ABকে $x$-অক্ষ ও A-কে মূলবিন্দু ধরিলে এবং $AB=a$ মনে করিলে A-র স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, B-র স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ হইবে। মনে কর, C ও D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$.




( চিত্র নং 11)

এক্ষণে P, Q, R, S এর স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে হইল

$$\left(\frac{a}{2}, 0\right),\ \left(\frac{a+x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right),\ \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ এবং } \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right).$$

অতএব, PR এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{2}\right), \text{ বা } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right).$$

আবার, QS এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a+x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}}{2}\right), \text{ বা, } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right).$$

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, PR ও QS এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক একই; সুতরাং উহারা একই বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অতএব, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

## Exercise 1

1. Find the distance of the following points from the origin :—

(i) (12, 5) (ii) (−3, 4) (iii) (−8, 12)
(iv) (−6, 8) (v) $\{(a+b), (a-b)\}$

2. Find the distance between the following pairs of points :—

(*a*) (5, 2), (2, 3) (*b*) (26, 10), (2, 3)
(*c*) (8, 12), (−4, 7) (*d*) (−3, −4), (5, −10)
(*e*) $(m, 0), (0, n)$ (*f*) $(a+b, c-d), (a-b, c+d)$
(*g*) $(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, \cos\theta)$ (*h*) $(a, -b), (-a, b)$

3. Find the co-ordinates of the mid points of the st. lines joining the following pairs of points :—

(i) (5, 0) and (0, 7) (ii) (−2, −4) and (6, 2)
(iii) (4, −2) and (3, −5).

4. Find the co-ordinates of the points which divide the st. lines joining the following pairs of points in the given ratio :—

(*a*) (6, $-10$) and ($-4$, 14), ratio 3 : 4 (internally)
(*b*) (3, 5) and ($-2$, $-7$), ratio 3 : 2 (internally)
(*c*) ($-1$, 2) and (4, $-5$), ratio 2 : 3 (externally)
(*d*) (3, 2) and (6, 5), ratio 2 : 1 (externally)

5. Find the co-ordinates of the point P which divides the st. line joining A (1, 2) and B (4, 3) so that AP = 2PB.

6. Find the ratio in which

(i) the point ($-2$, 2) divides the st. line joining the point ($-4$, 6) and ($\frac{1}{2}$, $-3$) ;

(ii) the point (1, 3) divides the join of (4, 6) and (3, 5).

7. If the distance between the points ($x$, 7) and (2, 3) be 5, find the value of $x$.

8. If the distance between the points (11, 3) and, (3, $y$) be 10, find the ordinate of the second point.

9. The square of the distance between the points (12, 5) and ($x$, 3) is 29 ; find the abscissa of the unknown point.

10. Prove that the points (2, 2), ($-2$, $-2$) and ($-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$) are the vertices of an equilateral triangle.

11. Prove that the triangle formed by joining the points (1, 4), (8, 8) and (4, 1) is isosceles.

12. Prove that the points ($2a$, $4a$), ($2a$, $6a$) and ($2a+\sqrt{3}a$, $5a$) are the vertices of an equilateral triangle whose side is $2a$. [C. U. (B. Sc.) '52]

13. Show that (0, 0), (2, 1), ($-1$, 7) and ($-3$, 6) are the vertices of a rectangle.

14. Prove that the points (3, 4), ($-1$, 7) and ($-3$, $-4$) are the vertices of a right-angled triangle.

15. Show that the st. line joining the points ($-4$, $-3$) and (8, 6) passes through the origin.

**16.** Verify that the points (1, 5), (3, 14) and (−1, −4) are collinear. [ C. U. (B. Sc.) ]

**17.** Show that the three points $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ and $(a, 2b)$ are collinear. [ C. U. (B. Sc.) '24 ]

**18.** If $(x, y)$ is equidistant from (4, 7) and (−5, 8), show that $9x-y+12=0$.

**19.** If $(x, y)$ is equidistant from (2, 4) and (−3, 3), show that $5x+y=1$.

**20.** If the point $(x, y)$ is equidistant from (5, 0), (0, 5) and (3, 4), show that $x=0$, $y=0$.

**21.** Find the co-ordinates of the point equidistant from (−2, 3), (2, 1) and (5, 3).

**22.** Find the co-ordinates of the point equidistant from (5, 4), (3, 6) and (1, 4).

**23.** Find the condition that $(x, y)$ should be equidistant from (2, 3) and (−1, 2).

**24.** Find the area of the triangle whose vertices are :—

(i) (2, −2), (4, 2) and (−1, 3)
(ii) (3, 5), (−2, 4) and (5, 2)
(iii) (8, 9), (2, 6) and (9, 2)
(iv) (1, 2), (3, 0) and the origin.
(v) $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, (0, 0)
(vi) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$ [C. U. 1958]

**25.** Find the distance between (−2, 3) and, (3, −1) and the co-ordinates of the point of trisection that is nearer to (−2, 3). [J. B. A.]

**26.** Find the centroid of the triangle whose vertices are (1, 7), (−4, 3) and (6, −1).

**27.** Find the centroid of the triangle whose vertices are (3, −4), (4, 7) and (2, 9).

**28.** Find the lengths of the medians of the triangle whose vertices are (2, 0), (4, 4) and (6, 2).

তোমরা জ্যামিতিতে দেখিয়াছ যে, (i) একটি বিন্দু যদি দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া গতিশীল হয়, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় সংযোজক-সরলরেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ;

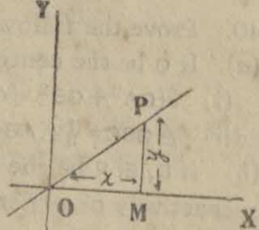
(ii) বিন্দুটি যদি দুইটি ছেদী সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া সঞ্চরণ করে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক ;

(iii) বিন্দুটি যদি কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় একটি বৃত্তের পরিধি ; ইত্যাদি।

স্থানাঙ্ক দ্বারা সর্ত প্রকাশ বা সঞ্চারপথের **সমীকরণ নির্ণয়।**

সর্তগুলিকে জ্যামিতির ভাষায় প্রকাশ না করিয়া গতিশীল বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

মনে কর, একটি বিন্দুর সঞ্চরণের জ্যামিতিক সর্ত হইল যে, তাহার সর্ব অবস্থানে $y$-অক্ষ হইতে তাহার দূরত্ব $x$-অক্ষ হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। চিত্র নং 12 দেখ। এখানে OX ও OY যথাক্রমে $x$ ও $y$ অক্ষ।



( চিত্র নং 12 )

মনে কর, ঐ গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থান P এবং উহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। অতএব, এস্থলে $x=2y$. P বিন্দুর অন্য যে-কোন অবস্থানেও তাহার ভুজ $(x)$ তাহার কোটির $(y)$ দ্বিগুণ বলিয়া সে স্থলেও $x=2y$.

অতএব, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $x=2y$.

অতএব, কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য (i) প্রদত্ত সর্ত প্রকাশ করিয়া প্রথমে একটি চিত্র আঁকিবে, (ii) উহাতে গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থানের স্থানাঙ্ক $(x, y)$ লইবে এবং (iii) তৎপরে $x$, $y$ দ্বারা প্রদত্ত সর্তটিকে প্রকাশ করিবে। তৎপরে উহাকে সরল করিলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে।

[ দ্রষ্টব্য : লব্ধ সমীকরণটি গতিশীল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হইবে এবং উহার সঞ্চারপথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উহা সিদ্ধ হইবে না। ]

## উদাহরণমালা 2

উদা. 1. Find the equation of the locus of a point which is always equidistant from the points (3, 4) and (5, 6).

মনে কর, A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (5, 6) এবং গতিশীল P বিন্দুর একটি অবস্থান P ও তাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

এক্ষণে, $AP^2=(x-3)^2+(y-4)^2$, এবং $BP^2=(x-5)^2+(y-6)^2$.

$\because$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে AP = BP,

$\therefore\ (x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-6)^2$,

বা, $x+y=9$ [ সরল করিয়া ], ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. Find the equation of the locus of a point if its distance from the $x$-axis is double its distance from the point (1, 1). [ C. U. (B. Sc.) '38 ]

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ এবং প্রদত্ত বিন্দুটি A(1, 1). এক্ষণে $x$-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $=y$, এবং A(1, 1) বিন্দু হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $y=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

বা, $y^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

বা, $y^2=4x^2-8x+4y^2-8y+8$,

$\therefore\ 4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. The points P and Q are $(-4, 0)$ and $(-1, 0)$ respectively. A point A moves in such a way that AP : AQ = 2 : 1. Find the locus of A.

মনে কর, গতিশীল A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

$AP=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ এবং $AQ=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\dfrac{2}{1}$

বা, $\dfrac{(x+4)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}=\dfrac{4}{1}$, বা, $4(x+1)^2+4y^2=(x+4)^2+y^2$.

$\therefore$ ( সরল করিয়া ) $x^2+y^2=4$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদা. 4.** The co-ordinates of two fixed points A and B are respectively $(-2, 4)$ and $(6, 8)$. A point P moves so that the area of the triangle PAB is always 10. Find the equation to the locus of P.

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

এখন, $\triangle$PABর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{x(4-8)+(-2)(8-y)+6(y-4)\}$

$=\frac{1}{2}\{8y-4x-40\}=4y-2x-20$

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $4y-2x-20=10$,

$\therefore$ $x-2y+15=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদা. 5.** A straight line moves such that the sum of the reciprocals of its intercepts on the axes is constant. Prove that the line passes through a fixed point. [Bombay, 1935]

মনে কর, গতিশীল সরল রেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

$x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ যথাক্রমে $a$ ও $b$.

এখন, সর্তানুযায়ী $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ধ্রুবক।

মনে কর, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{k}$ $\left(\dfrac{1}{k}\right.$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা$\left.\right)$

বা, $\dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{b}=1$. ইহাকে উপরের সমীকরণের সহিত তুলনা করিয়া দেখা যায় যে, ঐ সমীকরণ $(k, k)$ বিন্দুগামী। $k$ ধ্রুবক বলিয়া $(k, k)$ স্থির বিন্দু, সুতরাং সরলরেখাটি একটি স্থির বিন্দু দিয়া যাইবে।

উদা. 6. A straight line moves so that the sum of the intercepts made by it on the axes is always constant. Find the locus of the middle point of the intercept between the axes.

মনে কর, গতিশীল সরল রেখাটির একটি অবস্থানে, অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$। সুতরাং স্পষ্টতঃই এই অবস্থানে ঐ সরলরেখা দ্বারা $x$-অক্ষে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $=2\alpha$ এবং $y$-অক্ষে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $=2\beta$.

$$\text{প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, } 2\alpha+2\beta=\text{ধ্রুবক}=2k \text{ ( মনে কর )}$$
$$\therefore \quad \alpha+\beta=k.$$

অতএব দেখা যাইতেছে $(\alpha, \beta)$ বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ $x+y=k$.

উদা. 7. A and B being fixed points $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ respectively, find the locus of P when $PB^2+PC^2=2PA^2$, C being the point $(d, 0)$. [ Utkal, 1948]

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

$PB^2=(x+a)^2+y^2$, $PC^2=(x-d)^2+y^2$

এবং $PA^2=(x-a)^2+y^2$.

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $(x+a)^2+y^2+(x-d)^2+y^2$

$$=2(x-a)^2+2y^2,$$

বা, $2ax+a^2-2dx+d^2=-4ax+2a^2$,

বা, $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 8. Given the base and the difference of the squares of the sides of a triangle. Find the equation to the locus of the vertex. [ C. U. 1944 ]

মনে কর, প্রদত্ত ভূমি $BC=2a$. এখন ভূমিকে $x$-অক্ষ ও উহার মধ্য বিন্দু O-কে মূল বিন্দু ধরিলে B এর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ এবং C এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ হইবে।

মনে কর, গতিশীল শীর্ষবিন্দু A'র স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

$\therefore \quad AB^2=(x+a)^2+y^2$ এবং $AC^2=(x-a)^2+y^2$.

সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $AB^2 - AC^2 =$ ধ্রুবক।

$\therefore \quad \{(x+a)^2+y^2\}-\{(x-a)^2+y^2\}=$ ধ্রুবক $=k$ ( ধরি )

বা, $4ax=k. \quad \therefore \quad x=\frac{k}{4a}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

## Exercise 2

1. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that twice its abscissa always exceeds the ordinate by 4.

2. Find the equation to the locus of a point which is always equidistant from the two points (0, 0) and (3, 4).

3. Find the locus of a point which moves in such a way that its distance from the point (3, 0) is always equal to its distance from the origin.

4. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that twice its distance from the $x$-axis always exceeds three times its distance from the $y$-axis by 4.

5. Find the equation to the locus of a point which moves so that its distance from the $y$-axis is double its distance from the point (2, 2). [ C. U. ]

6. A point moves so that its distance from the point (1, 0) is always equal to its distance from the axis of $y$. Find the equation to its locus.

7. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that its distance from (5, 12) is always equal to 13.

8. A point moves in such a way that the sum of the squares of its distances from the two fixed points $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ is constant and is equal to $2k^2$. Find the equation to its locus.

9. The co-ordinates of two vertices of a triangle are (3, 2) and (5, 6). Find the equation to the locus of the third vertex if the area of the triangle be 12 sq. units.

10. Find the equation to the locus of a point which moves in a plane so that the sum of its distances from two fixed straight lines at right angles to each other, is always equal to a constant quantity $k$. [ *Hints* : পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্থির রেখা দুইটিকে অক্ষদ্বয় ধরিবে। ]

11. A moving line passes through a fixed point $(a, b)$ and meets the co-ordinate axes in P and Q. Find the locus of the middle point of PQ.

## The Straight line

## ( সরলরেখা )

### Equation of a Straight line

### ( সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় )

**10. কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।**

[ To find the equation to a st. line parallel to one of the co-ordinate axes. ]

মনে কর, QR $y$-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা [ চিত্র 14 ], উহা যেন $x$-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং OR$=a$, সুতরাং $y$-অক্ষ হইতে QR এর দূরত্ব$=a$ হইল। [ চিত্র নং 14 দেখ। )

মনে কর, এই QR-এর উপর F যে-কোন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। এখন F-এর যে কোন অবস্থানে উহার কোটি ( ordinate ) যাহাই হউক না কেন, উহার ভুজ সর্বদা$=$OR$=a$ হইবে। QR সরলরেখাকে দুইদিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও উহার উপরিস্থিত সকল বিন্দুরই ভুজ$=a$ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ অন্য কোন বিন্দুর ভুজ$=a$ হইতে পারে না। অতএব ঐ QR সরলরেখার **সমীকরণ হইল $x=a$.**

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি TN সরলরেখা $x$-অক্ষ হইতে $b$ একক দূরে $x$-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয়, তবে উহার উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি ( ordinate ) সর্বদা $= b$ হইবে। অতএব TN সরলরেখার সমীকরণ হইবে $\boldsymbol{y = b}$.

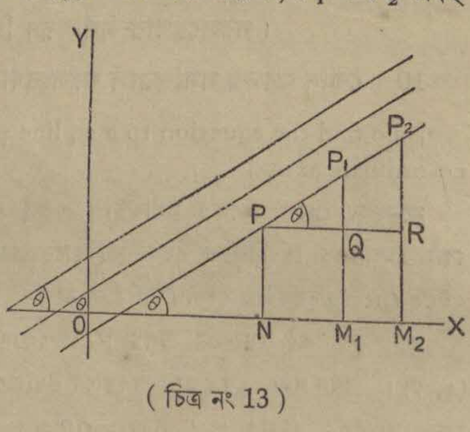
**অনুসিদ্ধান্ত :** (i) প্রথম সমীকরণে যদি $a = 0$ হয়, তবে $y$-অক্ষ হইতে QR-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় QR সরলরেখা $y$-অক্ষের সহিত সমাপতিত ( মিলিত ) হইবে এবং তখন $x = 0$ হইবে।

অতএব, **$y$-অক্ষের সমীকরণ হইল $\boldsymbol{x = 0}$.**

(ii) অনুরূপে দ্বিতীয় সমীকরণে $b = 0$ হইলে, $x$-অক্ষ হইতে TN-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় TN সরলরেখা $x$-অক্ষের সহিত মিলিয়া যাইবে এবং $y = 0$ হইবে। অতএব, **$x$-অক্ষের সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y = 0}$.**

**11. Gradient of a straight line** ( সরলরেখার প্রবণতা )

মনে কর, OX ও OY দুইটি লম্ব অক্ষ এবং P, $P_1$ ও $P_2$ একই সরলরেখার উপর P বিন্দুর তিনটি অবস্থান; PN, $P_1M_1$ ও $P_2M_2$ X-অক্ষের উপর লম্ব এবং P হইতে $P_2M_2$ এর উপর PR লম্ব, উহা যেন $P_1M_1$-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।




( চিত্র নং 13 )

মনে কর, $PP_1$ সরলরেখাটি X-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এক্ষণে, PN, $P_1M_1$ ও $P_2M_2$ যথাক্রমে P, $P_1$ ও $P_2$ এর কোটি ( ordinate ) হইল এবং PR ∥ OX বলিয়া $\angle P_2PR = \theta$.

কোন সরলরেখার Gradient বলিলে বুঝায় উহার উপরিস্থিত বিন্দুর ভুজ ( abscissa ) এক একক বৃদ্ধি পাইলে তাহার কোটি যতটুকু বৃদ্ধি পায়। চিত্রে P বিন্দু তাহার প্রথম অবস্থান P হইতে যখন সরিয়া $P_1$ অবস্থানে গেল তখন তাহার ভুজ $NM_1$ বৃদ্ধি পাইল এবং কোটি বৃদ্ধি পাইল $P_1Q$, সুতরাং ভুজটির $NM_1$ বৃদ্ধির জন্য কোটি বাড়িল $P_1Q$.

∴ ভুজটির এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি

$=\frac{P_1Q}{NM_1}=\frac{P_1Q}{PQ}$ [ $\because$ $PQ=NM_1$ ] ইহাই সরলরেখাটির Gradient বা প্রবণতা।

আবার দেখ, বিন্দুটি যদি P হইতে $P_2$ অবস্থানে যায়, তবে ভুজটির $NM_2$ বা PR বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হয় $P_2R$,

∴ ভুজটির এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি $=\frac{P_2R}{PR}$.

এক্ষণে, $\because$ $\triangle PQP_1$ ও $\triangle PRP_2$ সদৃশ, $\therefore$ $\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{P_2R}{PR}$.

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, সরলরেখাটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর পক্ষে Gradient ধ্রুবক হইবে।

এখন দেখ, যদি অক্ষ দুইটির সম্পর্কে একই দৈর্ঘ্য একক ধরা হয়, তবে $\frac{P_1Q}{PQ}=\tan\theta$ ( অর্থাৎ $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখাটি যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent )।

**Gradient-এর সংজ্ঞা ঃ** কোন সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের (positive direction এর) সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangentকে সরলরেখাটির gradient বা প্রবণতা বলে।

**11. (i) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু-সংযোজক সরলরেখার gradient নির্ণয়।**

(To find the gradient of the st. line joining two points )।

মনে কর, P ও $P_1$ নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু [ চিত্র 13 আঁক ] এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$।

মনে কর, $PP_1$ সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণে নত আছে।

$$\therefore \text{ Gradient} = \tan\theta = \frac{P_1Q}{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

[ **দ্রষ্টব্য :** চিত্র হইতে দেখা যায় সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রবণতা একই থাকে। ]

(ii) তিনটি বিন্দু একরেখীয় হইবার ( collinearity of three points) সর্ত সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে।

এখানে মনে কর, A $(x_1, y_1)$, B $(x_2, y_2)$ এবং C $(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু। যদি AB সরলরেখার gradient BC সরলরেখার gradient এর সমান হয়, তবে AB ও BC সরলরেখাদ্বয় $x$-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত হওয়ায় A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

এক্ষণে, AB-এর gradient $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ এবং BC-এর gradient $= \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$.

অতএব, $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$ হইলে A, B, C সমরেখ হইবে।

উহা হইতে পাই $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ হইলে ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে।

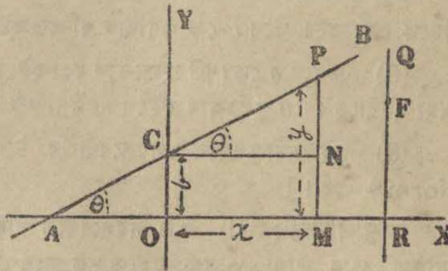
(iii) 11নং অনুচ্ছেদে যে $\theta$ কোণ ধরা হইয়াছে তাহা দ্বারা ইহাই বুঝায় যে $x$-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরাইয়া প্রদত্ত নির্দিষ্ট দিকের সহিত সমাপতিত করিতে হইলে উহাকে $\theta$ কোণ পরিমাণ ঘুরাইতে হইবে।

যদি সরলরেখাটির অবস্থান 16নং অনুচ্ছেদে AB সরলরেখার ন্যায় হয়, তবে সেস্থলে $m = \tan$ XAB হইবে ( tan BAO হইবে না )। এক্ষেত্রে $m$ স্থূলকোণের tangent হওয়ায় ঋণাত্মক হইবে। ]

**12. যে সরলরেখা $x$-অক্ষের সহিত কোন নির্দিষ্ট কোণে নত থাকিয়া $y$-অক্ষ হইতে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।**

[ To find the equation to the st. line which is inclined to the $x$-axis at a given angle and cuts off a given intercept from the $y$-axis. ]

মনে কর, AB সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণে নত এবং উহা $y$-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া ঐ অক্ষ হইতে OC অংশ ছিন্ন করিয়াছে।




( চিত্র নং 14 )

মনে কর OC $= b$ একক।

AB সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং মনে কর উহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। P হইতে $x$-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং C হইতে PM-এর উপর CN লম্ব টান। এক্ষণে $\angle PCN = \theta$, $CN = OM = x$, $PM = y$, $NM = CO = b$, এবং $\tan\theta = \frac{PN}{CN}$.

এক্ষণে, $y = PN + NM = PN + b = CN \times \frac{PN}{CN} + b = x\tan\theta + b$

$\therefore\ y = mx + b$ ( এখানে $m = \tan\theta$).

AB সরলরেখার উপর Pএর যে-কোন অবস্থানে উহার স্থানাঙ্ক $x$ ও $y$এর মধ্যে এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে না। অতএব, AB সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y = mx + b}$.

**অন্য প্রকার প্রমাণ ]** : ( চিত্র নং 14 দেখ ) মনে কর, AB সরলরেখা $y$-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া উহা হইতে OC $(= b)$ অংশ ছেদ করিয়াছে এবং AB-এর gradient $m$. AB-এর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু লও এবং মনে কর, উহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$. এখানে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$.

$\therefore$ Gradient $m = \frac{y-b}{x-0}$, বা $y - b = mx$.

$\therefore\ \boldsymbol{y = mx + b}$ ( যেখানে $m$, সরলরেখাটির gradient )।

[ দ্রষ্টব্য : (1) এই সমীকরণ নির্ণয়ে ধরা হইয়াছে যে, AB সরলরেখাটি $y$-অক্ষকে ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে। যদি উহা $y$-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে ছেদ করে, তবে $b$-কে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

(2) এখানে $\theta$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ ধরা হইয়াছে এবং $m$ বা $\tan\theta$ ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। $\theta$ স্থূলকোণ হইলে $m$ ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

(3) এই সমীকরণকে সরলরেখাটির ট্যান্‌জেণ্ট আকার ( Tangent form ) বলে। ]

**অনুসিদ্ধান্ত :** (i) AB সরলরেখাটি যদি মূলবিন্দু ( origin ) দিয়া যাইত, তবে তাহা $y$-অক্ষ হইতে শূন্য অংশ ছেদ করিত অর্থাৎ $b=0$ হইত। তখন সমীকরণটি হইত $y=mx$. অতএব, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y=mx}$.

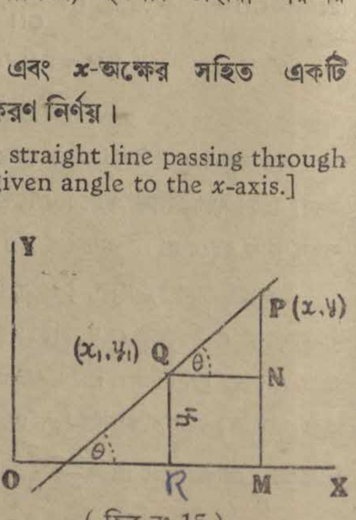
(ii) $y=mx+b$ সমীকরণে যদি $m=0$ হয়, তবে সরলরেখাটি $x$-অক্ষের সমান্তরাল হইবে, কারণ সেক্ষেত্রে $\tan\theta=0$ বলিয়া $\theta=0$. অতএব $x$-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y=b$. ইহা পূর্বে দেখিয়াছ।

(iii) দুইটি সরলরেখার gradient বা $m$ সমান হইলে তাহারা $x$-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত থাকিবে, সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

**13. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং $x$-অক্ষের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।**

[ To find the equation of a straight line passing through a given point and inclined at a given angle to the $x$-axis.]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা Q $(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া গিয়া $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত আছে। P বিন্দু হইতে $x$-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং QN⊥PM টান।



( চিত্র নং 15 )

এখানে PN = PM − NM $=y-y_1$, QN $=x-x_1$.

এক্ষণে, $\tan\theta = \frac{PN}{QN} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$,

যদি $\tan\theta = m$ হয়, তবে $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$.

[ **অন্য প্রমাণঃ** মনে কর, সরলরেখাটি $(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া গিয়া $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত আছে এবং উহার সমীকরণ $y=mx+b$. ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা $y=mx+b$ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। অতএব $(x_1, y_1)$ স্থানাঙ্ক দ্বারাও উহা সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ y=mx+b \cdots\cdots(1)$

এবং $y_1=mx_1+b\cdots\cdots(2)$ [ $y$-এর স্থানে $y_1$ ও $x$-এর স্থানে $x_1$ বসাইয়া, $m$ ও $b$ সর্বদা ধ্রুবক ]

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$y-y_1=m(x-x_1)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

## 14. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[ To find the equation of a st. line passing through two given points. ]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখাটি $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে এবং উহার সমীকরণ যেন $y=mx+b\cdots(1)$, এখানে $m$ ও $b$ দুইটিই অজ্ঞাত।

$(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া ঐ দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ $y=mx+b$ সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ y_1=mx_1+b\cdots\cdots(2)$

এবং $y_2=mx_2+b\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে (3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $y_2-y_1=m(x_2-x_1)\cdots(4)$

এবং (2) হইতে (1) ,, ,, ,, $y_1-y=m(x_1-x)\cdots(5)$

এখন (4) কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{y_2-y_1}{y_1-y} = \frac{x_2-x_1}{x_1-x}$,

$\therefore\ \boldsymbol{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[ দ্রষ্টব্য : (i) এখানে $\frac{y_2-y_1}{y_1-y}=\frac{x_2-x_1}{x_1-x}$ ইহাকেও নির্ণেয় সমীকরণ বলা যায়।

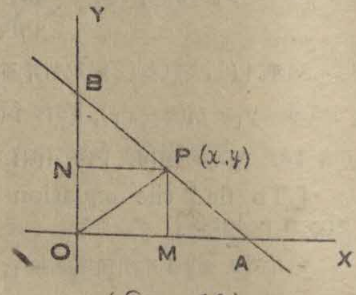
(ii) এই সরলরেখার $m$ বা gradient $=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

$=\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$। ]

**15. যে সরলরেখা উভয় অক্ষ হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।**

[ To find the equation of a st. line which cuts off given intercepts from the axes of co-ordinates. ]

মনে কর, AB সরলরেখা $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ছিন্ন অংশ OA $=a$ এবং OB $=b$.



( চিত্র নং 16 )

মনে কর, P ঐ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$. $x$-অক্ষের উপর PM লম্ব টান।

এখানে PM $=y$, OM $=x$.

এক্ষণে, $\because$ $\triangle$APM ও $\triangle$AOB সদৃশ,

$$\therefore \quad \frac{OM}{OA}=\frac{BP}{AB}, \text{ অর্থাৎ } \frac{x}{a}=\frac{BP}{AB} \cdots\cdots(1)$$

$$\text{এবং} \quad \frac{PM}{OB}=\frac{AP}{AB}, \text{ অর্থাৎ } \frac{y}{b}=\frac{AP}{AB} \cdots\cdots(2),$$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{BP}{AB}+\frac{AP}{AB}=\frac{BP+AP}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

[ অন্য প্রমাণ ] ঃ 16নং চিত্রে PN⊥OY টান এবং OP যোগ কর। এখানে PN = OM = $x$.

এক্ষণে, $\triangle AOB = \triangle AOP + \triangle BOP$

$\therefore \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}OA.PM + \frac{1}{2}OB.PN,$

বা, $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx,$ বা, $ab = ay + bx,$

$\therefore 1 = \frac{y}{b} + \frac{x}{a}$ [ $ab$ দ্বারা ভাগ করিয়া ], বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

[ দ্রষ্টব্য ঃ এস্থলে সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য ধরা হইয়াছে যে, সরলরেখাটি OX ও OY-এর ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে, কিন্তু উহা অক্ষদ্বয়ের মধ্যে একটিকে ধনাত্মক ও অন্যটিকে ঋণাত্মক দিকে কিংবা দুইটিকেই ঋণাত্মক দিকে ছেদ করিতে পারে। সেইরূপ স্থলে $a$, $b$ এর চিহ্নগুলি ( ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ) ঠিক করিয়া লইতে হইবে।

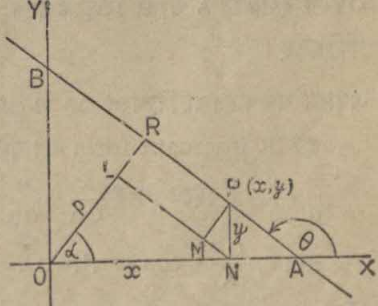
(2) উপরে লব্ধ সমীকরণটিকে সরলরেখার **ছেদিতাংশ রূপ** ( intercept form ) বলে।

16. অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বটি $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত আছে। **ঐ লম্ব ও কোণটি দ্বারা ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।**

[ To find the equation of a st. line in terms of the perpendicular drawn to it from the origin and the angle that the perpendicular makes with the axis of $x$. ]

মনে কর, মূলবিন্দু O হইতে সরলরেখা ABর উপর OR লম্ব। OR সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এবং OR = $p$ একক।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।




( চিত্র নং 17 )

AB সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P $(x, y)$ লওয়া হইল। P হইতে $x$-অক্ষের উপর PN লম্ব টান। N বিন্দু হইতে NL সরলরেখা OR-এর উপর লম্ব এবং P হইতে NL এর উপর PM লম্ব টান।

এক্ষণে, $OR = OL + LR = OL + PM$.

$\triangle OLN$ সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore \quad \alpha + \angle LNO = 90° = \angle LNO + \angle PNM.$

$\therefore \quad \angle PNM = \alpha, \qquad ON = x, \qquad$ এবং $PN = y$.

অতএব, $\dfrac{OL}{ON} = \cos\alpha, \qquad \therefore \quad OL = ON\cos\alpha = x\cos\alpha$ ;

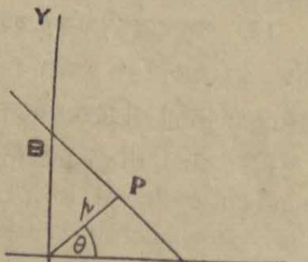
এবং $\dfrac{PM}{PN} = \sin\alpha, \qquad \therefore \quad PM = PN\ \sin\alpha = y\sin\alpha.$

$\therefore \quad OR = OL + PM$, বা, $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

[ অন্য প্রমাণ ] ঃ

মনে কর, O মূলবিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর OP লম্ব টানা হইয়াছে এবং উহা OX-এর সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর, $OP = p$ একক এবং AB যেন OX ও OYকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।




( চিত্র নং 18 )

এখানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ OA ও OB,

সুতরাং intercept form এর সমীকরণ

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ হইতে পাই $\dfrac{x}{OA} + \dfrac{y}{OB} = 1 \cdots\cdots(1)$

আবার, $\dfrac{OP}{A} = \cos\theta.\ \therefore\ OA = \dfrac{OP}{\cos\theta} = \dfrac{p}{\cos\theta}$ ;

এবং $\dfrac{OP}{OB} = \cos(90° - \theta) = \sin\theta, \ \therefore\ OB = \dfrac{OP}{\sin\ \theta} = \dfrac{p}{\sin\theta} \cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{p}{\sin\theta}}=1, \text{ বা, } \frac{x\cos\theta}{p}+\frac{y\sin\theta}{p}=1,$$

$\therefore \quad x\cos\theta+y\sin\theta=p$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[ সমীকরণের এই আকারকে উহার perpendicular বা canonical form বলা হয়। ]

**অনুসিদ্ধান্ত :** (i) সমীকরণটিকে Gradient formএ সাজাইলে পাওয়া যায় $y=(-\cot\alpha)x+p\sec\alpha$.

এখানে দেখা যাইতেছে, রেখাটির

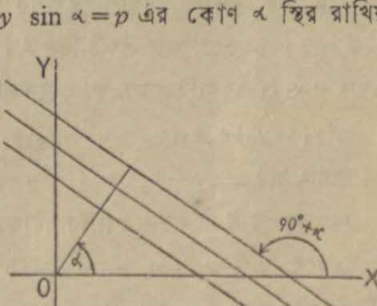
$$m \text{ বা } \tan\theta=-\cot\alpha=\tan(90°+\alpha),$$

$\therefore \quad \theta=90°+\alpha$ চিত্র হইতেও ইহা স্পষ্ট বুঝা যায়।

(ii) সমীকরণটিকে ছেদিতাংশরূপে ( intercept form ) সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p}=1$ বা $\frac{x}{p\sec\alpha}+\frac{y}{p\,\mathrm{cosec}\,\alpha}=1.$

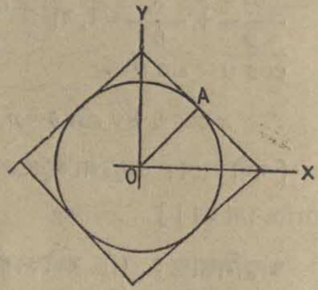
এখানে, $x$-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ $=p\sec\alpha$ এবং $y$-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ $=p\,\mathrm{cosec}\,\alpha$.

(iii) সমীকরণ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ এর কোণ $\alpha$ স্থির রাখিয়া $p$এর মান পরিবর্তন করিলে দেখা যায় ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়। মূলবিন্দু হইতে ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য বিভিন্ন কিন্তু $\alpha$ স্থির থাকার জন্য একই সরলরেখা ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্ব হয়, এবং সেইজন্য ঐ রেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল হয়।




( চিত্র নং 19 )

(iv) আবার দেখ, $p$ এর মান স্থির থাকিয়া $\alpha$ কোণের মান পরিবর্তিত হইলে, মূলবিন্দু হইতে লম্বটির দৈর্ঘ্য স্থির থাকিয়া $\alpha$ কোণের ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য লম্বটি ঘুরিতে থাকিবে। অতএব, লম্বটির বিভিন্ন অবস্থানে উহার পাদবিন্দু A একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থান করিবে। বৃত্তটির কেন্দ্রটি মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ $=p$ ( লম্বের দৈর্ঘ্য ) হইবে।



( চিত্র নং 20 )

অতএব, লম্বের ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানে সরলরেখাগুলি এই বৃত্তের স্পর্শক হইতেছে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে সমীকরণটির দ্বারা এমন কতকগুলি সরলরেখা বুঝা যাইবে যাহাদের প্রত্যেকটি একটি স্থির বৃত্তের স্পর্শক এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে মূল বিন্দু ও কেন্দ্র হইতে সরলরেখাগুলির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হইবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

17. যে কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত সমীকরণ হইবে।

[ The equation of any straight line is linear. ]

মনে কর, কোন সরলরেখার উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে-কোন দুইটি বিন্দু। এক্ষণে, অন্য একটি বিন্দু $A(x, y)$ ঐ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে অর্থাৎ P ও Q-এর সহিত সমরেখ হইবে যদি

$x(y_1-y_2)+x_1(y_2-y)+x_2(y-y_1)=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$ হয়,

অতএব ইহাই ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে।

এক্ষণে, $y_1-y_2=a$, $x_2-x_1=b$ এবং $x_1y_2-x_2y_1=c$ বসাইয়া ঐ সমীকরণটি হইল $ax+by+c=0$ এবং ইহাই $x$ ও $y$ এর একঘাত দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সমীকরণের **সাধারণ রূপ** ( general form )।

**18. $x$ ও $y$ এর একঘাত সমীকরণ সতত একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।** [ Any linear equation represents a straight line. ]

$x$ ও $y$ এর একঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল

$ax+by+c=0$ ( যেখানে $a$ ও $b$ দুইটিই শূন্য নহে )……(1)

মনে কর, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ও $(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি $ax+by+c=0$ সমীকরণের সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত। অতএব, ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad ax_1+by_1+c=0 \cdots\cdots(2)$$

$$ax_2+by_2+c=0 \cdots\cdots(3)$$

$$ax_3+by_3+c=0 \cdots\cdots(4)$$

(2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{a}{y_1-y_2}=\frac{b}{x_2-x_1}=\frac{c}{x_1y_2-x_2y_1}.$$

এক্ষণে, (4) হইতে $a$, $b$ ও $c$-এর মান বসাইয়া পাই

$$x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_2=0.$$

অতএব, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ও $(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore$ $ax+by+c=0$ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

**19. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ।**

($a$) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $ax+by+c=0$ কে $y=mx+c$ আকারে প্রকাশ।

[ To express the equation $ax+by+c=0$ in the form $y=mx+c$ ].

সরলরেখার সমীকরণের রূপ $ax+by+c=0$,

$\therefore by=-ax-c.$

$\therefore$ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ইহা $y=mx+b$ এই আকারের হইল ; কারণ

এখানে $m=-\frac{a}{b}$ এবং ধ্রুবকরাশি $b$ এর স্থানে $\frac{c}{b}$ হইয়াছে।

(*b*) সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপকে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ রূপে প্রকাশ।

[ To express the equation $ax+by+c=0$ in the form $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ].

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0$

অতএব, $ax+by=-c$,

বা, $\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$ [ উভয়পক্ষকে $-c$ দ্বারা ভাগ করিয়া ]

বা, $\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$ এবং ইহাই সমীকরণের নির্ণেয় রূপ ;

কারণ, এখানে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশদ্বয় যথাক্রমে $-\frac{c}{a}$ ও $-\frac{c}{b}$.

(*c*) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে লম্ব আকারে প্রকাশ।

[ To express the equation $ax+by+c=0$ in the prependicular form or in the form $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$. ]

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0$ ... ...(1)

এখানে যদি $\tan\theta=\frac{b}{a}$ হয়, তবে $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$,

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$,

বা, $\cos^2\theta=\frac{a^2}{a^2+b^2}$ $\therefore$ $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$,

অনুরূপে, $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$,

এক্ষণে (1) হইতে পাই $ax+by=-c$,

বা, $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

[ উভয়পক্ষকে $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া ]

বা, $x \cos \theta + y \sin \theta = -\dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং ইহা $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ এই আকারের হইয়াছে।

এখানে ডানপক্ষের হরের + বা − যে চিহ্ন ধরিলে সমগ্র ডানপক্ষ ধনাত্মক হয় সেই চিহ্ন লইতে হইবে।

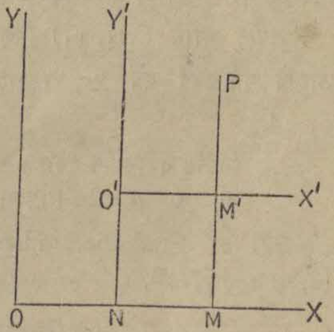
## 20. মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন।

কখন কখন প্রয়োজন হইলে মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়কে পরিবর্তিত অর্থাৎ স্থানান্তরিত করিতে হয়। ইহা তিন প্রকারের হইতে পারে। যথা— (1) দিকের ( direction ) পরিবর্তন না করিয়া কেবল মূলবিন্দুর পরিবর্তন ; অথবা (2) মূলবিন্দু অপরিবর্তিত রাখিয়া কেবল দিকের পরিবর্তন ; অথবা (3) মূলবিন্দু ও দিক উভয়ের পরিবর্তন।

দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রকার এখানে পাঠ্য বহির্ভূত ; সুতরাং প্রথম প্রকারের পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে।

মনে কর, OX ও OY মূল (আদি) অক্ষদ্বয় ( এখানে প্রদত্ত মূলবিন্দু হইল O )।

মনে কর, ইহাদের সহিত সমান্তরাল পরিবর্তিত নূতন অক্ষদ্বয় হইল O′X′ ও O′Y′ ( এখানে নূতন মূলবিন্দু হইল O′ )।



( চিত্র নং 21 )

মনে কর, মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নূতন মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক ( $x', y'$ )। একই সমতলে অবস্থিত P একটি বিন্দু। মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$ এবং নূতন অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$। OX এর উপর PM ও O′N লম্ব টান, PM যেন O′X′কে M′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $OM = x$, $MP = y$, $O'M' = x_1$, $M'P = y_1$, $ON = x'$ এবং $NO' = y'$.

অতএব, $x = \mathrm{OM} = \mathrm{ON} + \mathrm{NM} = \mathrm{ON} + \mathrm{O'M'} = x' + x_1$ ;

এবং $y = \mathrm{MP} = \mathrm{MM'} + \mathrm{M'P} = \mathrm{NO'} + \mathrm{M'P} = y' + y_1$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে, $x$ এর স্থানে $x' + x_1$ এবং $y$ এর স্থানে $y' + y_1$ অর্থাৎ $(x, y)$ স্থানাঙ্কের স্থানে $(x' + x_1, y' + y_1)$ বসাইলে আদি মূলবিন্দুটি $(x', y')$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। ইহা লম্ব ও তির্যক উভয় প্রকার অক্ষদ্বয়ের পক্ষেই সত্য।

## উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Find the equation of the line parallel to the $x$-axis and passing through the point (4, 7).

$x$-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y = b$.

এখানে সরলরেখাটি (4, 7) বিন্দুগামী, সুতরাং এখানে $b = 7$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y = 7$.

উদা. 2. Find the equation of the line that passes through the point $(-1, 4)$ and has a gradient 2.

আমরা জানি $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার gradient $m$ হইলে তাহার সমীকরণ হয় $y - y_1 = m(x - x_1)$. এখানে $m = 2$, $x_1 = -1$, $y_1 = 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y - 4 = 2\{x - (-1)\}$

বা, $y - 4 = 2x + 2$, বা, $2x - y + 6 = 0$.

উদা. 3. Find the gradient of the line joining the points (2, 4) and (1, 2),

$(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার gradient $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

এখানে $y_1 = 4$, $y_2 = 2$ এবং $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় gradient $= \dfrac{4 - 2}{2 - 1} = 2$.

উদা. 4. Find the acute angle between the two st. lines whose gradients are 1 and $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$m_1$ ও $m_2$ দুইটি সরলরেখার gradients এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ $\theta$ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \text{ হয়।}$$

$$\therefore \text{ এখানে } \tan\theta = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}$$

$$= 2 - \sqrt{3} = \tan 15°.$$

$\therefore\ \theta = 15°$, সুতরাং নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণ $= 15°$.

উদা. 5. Find the equation of the st. line cutting off an intercept 2 units from the negative side of the $y$-axis and inclined at 120° to the $x$-axis.

মনে কর, সমীকরণটি $y = mx + c$.

এখানে $m = \tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$,

এবং $c = -2$ ($\because$ এখানে ছেদিতাংশ $y$-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 2 একক।)

$\therefore$ এখানে সমীকরণটি হইল $y = x(-\sqrt{3}) - 2$, বা, $y + x\sqrt{3} + 2 = 0$.

উদা. 6. Find the equation of the line passing through the points $(-1, 2)$ and $(3, -4)$.

$(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. এখানে $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ এবং $y_1 = 2$, $y_2 = -4$.

অতএব, $\dfrac{y-2}{x-(-1)} = \dfrac{-4-2}{3-(-1)}$, বা $\dfrac{y-2}{x+1} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x + 2y - 1 = 0$.

[ অন্য প্রণালী ] মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $y = mx + c$.

$\because$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখায় অবস্থিত,

$\therefore$ উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা ঐ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

অতএব, এখানে $2 = -m + c \cdots (1)$ এবং $-4 = 3m + c \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $m=-\frac{3}{2}$ এবং $c=\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$,

অর্থাৎ $3x+2y-1=0$.

উদা. 7. Find the points at which the line $2y-4x-7=0$ cuts the axes of co-ordinates and find its gradient.

যে বিন্দুতে সরলরেখাটি $x$-অক্ষকে ছেদ করে সেই বিন্দুর কোটি শূন্য অর্থাৎ সেখানে $y=0$.

প্রদত্ত সমীকরণে $y=0$ হইলে $x=-\frac{7}{4}$ হইবে।

অতএব, সরলরেখাটি $x$-অক্ষকে $(-\frac{7}{4}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপে সমীকরণে $x=0$ শূন্য হইলে $y=\frac{7}{2}$ হয়।

অতএব, সরলরেখাটি $y$-অক্ষকে $(0, \frac{7}{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে সমীকরণটি হইল $2y=4x+7$, বা $y=2x+\frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় gradient $=2$.

উদা. 8. Obtain the equation of the st. line which makes intercepts 2 and 1 on the co-ordinate axes. [C. U. '44]

Also find the intercepts made on the axes by the line $2x+y=5$.

মনে কর, সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. এখানে $a=2$ এবং $b=1$.

$\therefore$ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$, বা, $x+2y=2$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

আবার, প্রদত্ত $2x+y=5$ সমীকরণকে $\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{5}=1$ এই আকারে লেখা যায়। $\therefore$ $x$ ও $y$ অক্ষের ছেদিতাংশদ্বয় যথাক্রমে $\frac{5}{2}$ ও 5.

উদা. 9. A straight line passes through the point $(2, \frac{5}{3})$ and is such that the portion of it intercepted between the axes is divided at the point internally, in the ratio 5 : 4. Find its equation.

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

মনে কর, ইহা $x$-অক্ষকে A বিন্দুতে ও $y$-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। $\therefore$ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$।

AB রেখা যে বিন্দুতে 5 : 4 অনুপাতে বিভক্ত হইবে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{5.0+4.a}{5+4}, \frac{5.b+4.0}{5+4}\right)$ বা $(\frac{4}{9}a, \frac{5}{9}b)$.

কিন্তু এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত আছে $(2, \frac{5}{3})$.

$\therefore \frac{4}{9}a=2$, বা $a=\frac{9}{2}$, এবং $\frac{5}{9}b=\frac{5}{3}$, বা $b=3$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$, অর্থাৎ $2x+3y-9=0$.

**উদা. 10.** Find the points at which the line $2y+4x+7=0$ cuts the axes of co-ordinates and find its gradient. Also, find the area of the triangle which this line forms with the co-ordinate axes.

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $y=mx+c$ আকারে লিখিয়া পাওয়া যায় $y=-2x-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা ( gradient ) $=-2$.

আবার, উহাকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে লিখিলে দাঁড়ায়, $\frac{x}{-\frac{7}{4}}+\frac{y}{-\frac{7}{2}}=1$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-\frac{7}{4}, 0)$ ও $(0, -\frac{7}{2})$.

সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিবে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ। মূলবিন্দু হইতে $x$-অক্ষ বরাবর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{4}$ এবং $y$-অক্ষ বরাবর অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{2}$.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$ বা $3\frac{1}{16}$ বর্গ একক।

উদা. 11. Find the equation of the line which makes equal intercepts on the axes and pass through (3, −5).

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

এখানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ সমান বলিয়া $a=b$,

$\therefore$ সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$, বা, $x+y=a.$

আবার রেখাটি (3, −5) বিন্দুগামী বলিয়া, $3-5=a$, বা $a=-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x+y=-2$, বা $x+y+2=0$.

উদা. 12. Find the equation of the line passing through (2, 3) and parallel to the join of (4, −5) and (−7, 3).

(4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার প্রবণতা ( gradient )

$$=\frac{-5-3}{4-(-7)}=-\frac{8}{11}.$$

(2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-3=m(x-2)$.

$\because$ এই রেখাটি (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়গামী রেখার সমান্তরাল,

$\therefore$ উভয় রেখার প্রবণতা একই হইবে। $\therefore$ $m=-\frac{8}{11}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y-3=-\frac{8}{11}(x-2)$, বা, $8x+11y-49=0$.

উদা. 13. A straight line cuts off intercepts 7 and $5\frac{1}{4}$ from the axes ; find its equation and determine the ratio in which the join of the points (−9, 5) and (7, 9) is divided by this line.

অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ 7 ও $5\frac{1}{4}$, সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে $\frac{x}{7}+\frac{y}{5\frac{1}{4}}=1$, বা $3x+4y=21$.

মনে কর, এই রেখাটি (−9, 5) ও (7, 9) বিন্দুদ্বয় সংযুক্তকারী রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{7m-9n}{m+n}, \frac{9m+5n}{m+n}\right)$.

যেহেতু এই বিন্দুটি উপরিলিখিত সরলরেখারও একটি বিন্দু,

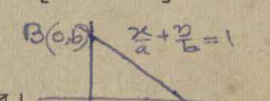
$$\therefore \quad 3\left(\frac{7m-9n}{m+n}\right)+4\left(\frac{9m+5n}{m+n}\right)=21,$$

বা, $3(7m-9n)+4(9m+5n)=21(m+n)$,

বা, $36m=28n, \quad \therefore \frac{m}{n}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$.

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=7:9$.

উদা. 14. A straight line forms a right-angled triangle with the axes of co-ordinates. If the hypotenuse is 13 and area of the triangle is 30, find the equation of the straight line. [ C. U. '38]




মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

ইহা অক্ষদ্বয়কে $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2}$.

প্রদত্ত প্রশ্নে, ইহাই ত্রিভুজটির অতিভুজ, $\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}=13\cdots(1)$

আবার, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ab=30, \quad \therefore \quad ab=60\cdots(2)$

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+2ab=169+120 \\ \text{এবং } a^2+b^2-2ab=169-120 \end{array}\right\}$

বা, $\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=289 \\ (a-b)^2=\ 49\end{array}\right\} \therefore \left.\begin{array}{l} a+b=\pm 17 \\ a-b=\pm\ 7\end{array}\right\}$

$\therefore \quad a=\pm 12$ ও $b=\pm 5$,

এবং $a=\pm 5$ ও $b=\pm 12$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{\pm 12}+\frac{y}{\pm 5}=1$, বা, $5x+12y=\pm 60$

এবং $\frac{x}{\pm 5}+\frac{y}{\pm 12}=1$, বা, $12x+5y=\pm 60$.

উদা. 15. Find the equation to the straight line which passes through the points (1, 2) and (2, 1). Find

also the length of the straight line intercepted between the axes. [ C.U. 1936 ]

(1, 2) ও (2, 1) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-2}{1-2}, \text{ বা } x+y=3\cdots\cdots(1) \text{ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।}$$

(1)-কে ছেদিতাংশরূপে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

সরলরেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 3 ও 3 হইল।

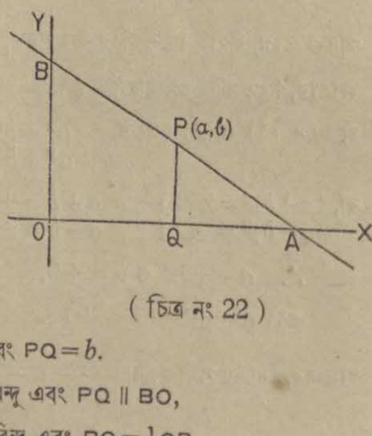
∴ সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

**উদা. 16.** A straight line is drawn through the point $(a, b)$ such that the portion of the line intercepted between the axes is bisected at that point. Find its equation.

মনে কর, AB সরলরেখাটি $x$ ও $y$ অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB অংশের মধ্যবিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $(a, b)$।

সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।




( চিত্র নং 22 )

[ চিত্রে ] $x$-অক্ষের উপর PQ লম্ব টান। এখন OQ $=a$, এবং PQ $=b$.

কিন্তু P, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং PQ ∥ BO,

∴ Q, OA বাহুর মধ্যবিন্দু এবং PQ $=\frac{1}{2}$OB.

∴ OA $=2$OQ $=2a$ এবং OB $=2$PQ $=2b$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$, বা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

উদা. 17. Find the length of the perpendicular from the origin upon the line $3x+4y-5=0$.

$3x+4y-5=0,\quad$ বা, $3x+4y=5.$

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$ একক।

[ দ্রষ্টব্য : মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য বাহির করিতে হইলে, সরলরেখার সমীকরণটিকে এমনভাবে সাজাইতে হইবে যেন সমীকরণটির ধ্রুবক অংশ সমান চিহ্নের ডান দিকে ধনাত্মক সংখ্যারূপে থাকে। তারপর, $x$ ও $y$ এর সহগ দুইটির বর্গের সমষ্টি লইয়া, তাহার বর্গমূল দ্বারা ঐ ধ্রুবক সংখ্যাকে ভাগ করিলেই লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে। ]

উদা. 18. Reduce $x+\sqrt{3}y+14=0$ to the perpendicular form of equation and hence find the length of the perpendicular from the origin upon the given straight line.

এখানে, $x+\sqrt{3}y+14=0,$

বা, $-\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}x-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}y=\dfrac{14}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}},$

বা, $\left(-\frac{1}{2}\right)x+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y=7,\quad$ বা, $x\cos 240^\circ+y\sin 240^\circ=7.$

[ দ্রষ্টব্য : এখানে বুঝা গেল $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ ও $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. এখন যেহেতু $\cos\alpha$ ও $\sin\alpha$ উভয়ের মানই ঋণাত্মক সুতরাং কোণটি তৃতীয় পাদে ( third quadrant এ) থাকিবে। $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ যখন হয়, তখন $\alpha=60^\circ$. অতএব, এক্ষেত্রে $\alpha$-র মান $60^\circ$-র এমন গুণিতক যাহা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়। সুতরাং উহা $180^\circ+60^\circ$ বা $240^\circ$ হইবে। ]

উপরের সমীকরণ হইতে পাই, লম্বের দৈর্ঘ্য $=7$ একক।

উদা. 19. If $p$ and $p_1$ be the perpendiculars from the origin upon the lines $x\sin\theta+y\cos\theta=\frac{a}{2}\sin 2\theta$ and $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$, prove that $4p^2+p_1^2=a^2$.
[ C. U. '28, '58 ]

এক্ষেত্রে, $p=\dfrac{\frac{a}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=\dfrac{a}{2}\sin 2\theta,\quad\therefore\quad 2p=a\sin 2\theta.$

আবার, $p_1 = \dfrac{a \cos 2\theta.}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a \cos 2\theta.$

অতএব, $4p^2 + p_1{}^2 = (2p)^2 + (p_1)^2 = a^2 \sin^2 2\theta + a^2 \cos^2 2\theta$

$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = a^2 \times 1 = a^2.$

$\therefore \quad 4p^2 + p_1{}^2 = a^2.$

উদা. 20. Transform to parallel axes through the point $(-3, 2)$ the equations :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ and (ii) $2x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0.$

এখানে (i) ও (ii) এ

$x = x' - 3$ এবং $y = y' + 2$ বসাইয়া পাই

(i) $3(x' - 3) + 2(y' + 2) - 7 = 0,$

বা, $3x' + 2y' - 12 = 0.$

এবং (ii) $2(x' - 3)^2 + (y' + 2)^2 + 4(x' - 3) - 4(y' + 2) = 0,$

বা, $2(x'^2 - 6x' + 9) + (y'^2 + 4y' + 4) + 4x' - 12 - 4y' - 8 = 0,$

বা, $2x'^2 + y'^2 - 8x' + 2 = 0.$

## Exercise 3

1. State the gradient of the lines passing through the following pairs of points :—

(i) $(1, -2)$ and $(3, 4)$ ; (ii) $(-5, 3)$ and $(9, 5)$ ;
(iii) $(a, b - a)$ and $(a + b, b)$ ; (iv) $(0, -5)$ and $(-4, 7)$ ;
(v) $(8, 3)$ and $(-2, 3)$.

2. Find the gradient of the following lines and also the co-ordinates of the points on the axis of $x$ through which these lines pass :—

(i) $3x + 2y = 9$ ; (ii) $y - 3x = 6$ ; (iii) $x + y = 0$ ;
(iv) $2x - y + 5 = 0$ ; (v) $x \operatorname{cosec} \theta + y \sec \theta + r = 0.$

3. Find the angles at which the lines joining the following pairs of points are inclined to the axis of $x$ and

also the co-ordinates of the points on the axis of $y$ through which these lines pass :—

(i) $(0, -3)$ and $(0, 5)$ ; (ii) $(1, 2)$ and $(3, 4)$ ;

(iii) $(-6, 1)$ and $(-3, -2)$ ;

(iv) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ and $(\sqrt{3}, 5)$ ; (v) $(1, 1)$ and $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

4. Find the intercepts on the axes of the following lines :—

(i) $2x-9y+6=0$ ; (ii) $3x-4y+1=0$ ;

(iii) $y \cos\theta - x \sin\theta = r$.

5. Find the equations to the straight lines cutting off following intercepts from the axes of $x$ and $y$ respectively :—

(i) 3 and 2 ; (ii) $-5$ and $-4$ ; (iii) 3 and $-\frac{9}{5}$ ;

(iv) $-\frac{13}{5}, \frac{13}{9}$ ; (v) $\frac{a}{b}$ and 1 ; (vi) $\frac{a}{b} \sec\alpha$ and $\frac{b}{a} \cos\alpha$.

6. Find the equations to the straight lines passing through the following pairs of points :—

(i) $(5, -2)$ and $(-3, 7)$ ; (ii) $(0, b)$ and $(-a, 0)$ ;

(iii) $(c \cos C, d \sin C)$ and $(c \cos D, d \sin D)$ ;

(iv) $(\alpha p_1^2, 2\alpha p_1)$ and $(\alpha p_2^2, 2\alpha p_2)$ ;

(v) $(h \sec\alpha, k \tan\alpha)$ and $(h \sec\beta, k \tan\beta)$ ;

(vi) $(3, -4)$ and $(1, 2)$. [U. U. 1948]

7. Find the equations to the sides of the triangles whose vertices are given by :—

(i) $(-4, 3)$, $(7, -3)$ and $(5, 8)$ ;

(ii) $(-2, 5)$, $(5, -2)$ and $(10, 10)$ ;

(iii) $(0, 0)$, $(5, -2)$ and $(6, 9)$.

8. Reduce the following equations to the perpendicular form (i. e., $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$) :—

(i) $\sqrt{3}x+y=8$ (ii) $x-y+7\sqrt{2}=0$

(iii) $x+y+4=0$ (iv) $6x-13y+19=0$.

9. Find the lengths of the perpendiculars from the origin on the lines whose equations are given below :—

(i) $4x+3y-5=0$ ; (ii) $5x-12y=26$ ;

(iii) $2x+3y+7=0$ ; (iv) $by \cos\theta - ax \sin \theta + ab = 0$.

10. Find the equation to a straight line—

(*a*) which is inclined at 60° to the $x$-axis and cuts the axis of $y$ at unit distance from the origin.

(*b*) which is inclined at 120° to the axis of $x$ and the length of the perpendicular on the line from the origin is 5.

(*c*) which passes through the point $(5, -7)$ and makes equal intercepts on the axes of co-ordinates.

(*d*) which is inclined at an angle of 45° to the axis of $x$ and which bisects the join of the points $(4, 7)$ and $(6, 5)$.

(*e*) which passes through the point $(5, 6)$ and has intercepts on the axes equal in magnitude but opposite in sign.

Find also the co-ordinates of the point at which the ordinate is double the abscissa. [C. U.]

(*f*) which passes through the point $(-4, 9)$ and is such that the portion of it intercepted between the axes is divided at the point in the ratio 3 : 2.

(*g*) which passes through the point $(a, b)$ and is such that the portion of it intercepted between the axes is bisected at this point.

(*h*) which passes through the point $(2, 3)$ and is parallel to the line joining the points $(4, -7)$ and $(-7, 4)$.

(*i*) which is the perpendicular bisector of the segment joining the points $(2a, 2b)$ and $(2c, 2d)$. [C. U, 1958]

11. Verify that the three points $(1, 5)$, $(3, 14)$ and $(-1, -4)$ are collinear. Also, find the line of collinearity. [C. U. 1957]

12. Find the equations to the straight lines which pass through the origin and trisect the portion of the straight

line $4x+3y=12$ intercepted between the axes of co-ordinates.

13. Find the equation of the straight line which passes through the point (2, 3) and is such that the sum of its intercepts on the axes is 10.

14. Given the triangle $A \equiv (8, 2)$, $B \equiv (-2, 7)$, $C \equiv (-2, -1)$. Find the equation of the median through A. [Mysore, 1946]

Also, prove that the join of the middle points of AB and AC is parallel to BC.

15. A straight line moves such that the sum of the reciprocals of its intercepts on the axes is constant. Prove that the line passes through a fixed point. [Bombay, 1935]

16. Find the equations of the tangents to the circle, whose centre is at the origin and radius equal to 3, at the extremities of a diameter making an angle of 60° with the axis of $x$.

17. Find the equation to the straight line which passes through the point (5, 6) and has intercepts on the axes equal in magnitude but opposite in sign. Find also the co-ordinates of the point at which the ordinate is double the abscissa.

[ C. U. 1934 ]

18. Find the equation of the straight line, which cuts off an intercept $-3$ from the $y$-axis and is inclined at an angle of 45° to the positive direction of the $x$-axis.

Draw a sketch of the straight line and show from geometrical consideration that this line is at right angles to the straight line $x+y=2$. [ C. U. 1939 ]

19. (a) Find the inclination of the straight line $4x+5y+3=0$ to the axis of $x$ and find its intercept on $y$-axis.

(b) The straight line $3x+y-6=0$ cuts the axes at P and Q. Find the distance between P and Q.

(c) Find the lengths of the intercepts made on the axes by the line $\frac{x}{2}+3y=1$.

20. Perpendiculars are drawn from the origin to the lines $x+2y-3=0$ and $2x+3y=5$. Find the equation of the straight line joining the feet of the prependiculars.

21. Transform to parallel axes through the point $(-2, 1)$ the equations

$$\text{(i)}\quad x^2-4y+4x+8=0$$

$$\text{and (ii)}\quad 2x^2+3y^2-4x+3y-8=0.$$

22. What will the equation $x^2+y^2-2x+3y+4=0$ become, if the origin is moved to the point (3, 0) ?

23. What does the equation $(x+a)^2+(y-b)^2=c^2$ become, when it is transferred to parallel axes through the point $(-a+c, b)$ ?

## Straight lines

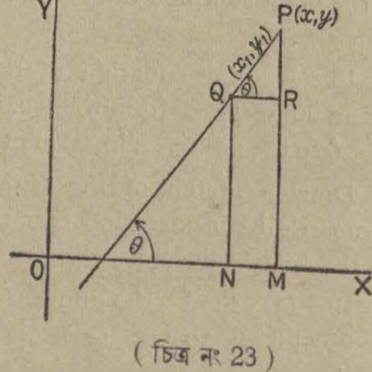
### 21. সুসমঞ্জস আকারে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[ To find the equation of a straight line in symmetrical form. ]

মনে কর, প্রদত্ত Q $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখাটি $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণে নত আছে।

ঐ সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু P $(x, y)$ লও।

এখন 13নং অনুচ্ছেদ অনুসারে সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে।




( চিত্র নং 23 )

$$y-y_1=\tan\theta\,(x-x_1),\quad \text{বা}\quad \frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}.$$

মনে কর, $PQ=r$, $\therefore$ $QR=r\cos\theta$,

বা, $x-x_1=r\cos\theta$ [ চিত্রানুসারে ], $\therefore$ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=r$.

আবার, $PR=r\sin\theta$, বা, $y-y_1=r\sin\theta$, $\therefore$ $\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r$.

অতএব, $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r\cdots(1)$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(1) হইতে পাওয়া যায় $x=x_1+r\cos\theta$ এবং $y=y_1+r\sin\theta$.

[ **দ্রষ্টব্য ঃ** এই আকারে সমীকরণের বিশেষ সুবিধা এই যে, সরলরেখাস্থিত কোন প্রদত্ত বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরত্বে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। আবার, প্রদত্ত দুইটি বিন্দুর মধ্যস্থিত সরলরেখা বরাবর দূরত্বও নির্ণয় করা যায়। ]

**উদাহরণ।** P is a point $(1, 2)$ and PQ makes an angle of $45°$ with the $x$-axis and $PQ=3$. Find the co-ordinates of Q.

মনে কর, Q এর স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

সরলরেখাটি $x$-অক্ষের সহিত $45°$ কোণে নত আছে,

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $\dfrac{x-1}{\cos 45°}=\dfrac{y-2}{\sin 45°}=3$.

$\therefore$ $x-1=3\cos 45°=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\therefore$ $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+1$

এবং $y-2=3\sin 45°=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\therefore$ $y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+2$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+1, \dfrac{3}{\sqrt{2}}+2\right)$.

## 22. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়।

( To find the angle between two given straight lines. )

(a) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$. সরলরেখা দুইটি $x$-অক্ষের

ধনাত্মক দিকের সহিত $\alpha$ ও $\beta$ কোণ উৎপন্ন করিলে, $\tan \alpha = m_1$ ও $\tan \beta = m_2$ হইবে।

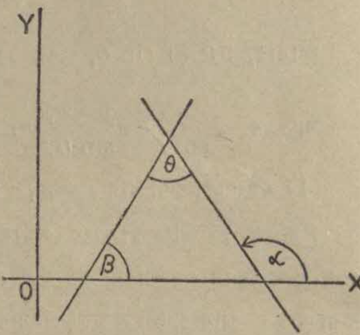
চিত্র হইতে দেখা যায় $\theta = \alpha - \beta$.

$\therefore \quad \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \, \tan \beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2};$$

সুতরাং, $\theta = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \cdots (1)$,

ইহা দ্বারাই সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণটি পাওয়া গেল।



( চিত্র নং 24 )

[ দ্রষ্টব্য : যখন দুইটি সরলরেখা ( এক সমকোণে না থাকিয়া ) পরস্পর ছেদ করিবে, তখন উহাদের অন্তর্ভূত কোণের একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর কোণটি স্থূলকোণ হইবে। কোন অঙ্কে $\tan \theta$র মান ধনাত্মক হইলে বুঝিতে হইবে সূক্ষ্মকোণটি নির্ণীত হইল এবং $\tan \theta$র মান ঋণাত্মক পাওয়া গেলে বুঝিতে হইবে স্থূলকোণটি নির্ণীত হইয়াছে। ]

(*b*) যখন সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হইবে, তখন উহাদিগকে $y = mx + c$ আকারে সাজাইয়া লইবে।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad \text{বা,} \quad y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}.$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad \text{বা,} \quad y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}.$$

$$\therefore \; m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \text{ এবং } m_2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

$$\text{সুতরাং, } \tan \theta = \frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} \ldots\ldots (2)$$

(c) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = p_1$ এবং $x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = p_2$.

এক্ষেত্রে মূলবিন্দু হইতে সরলরেখাদ্বয়ের উপর যে দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইবে তাহারা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\alpha_1$ ও $\alpha_2$ কোণে নত থাকিবে। সুতরাং, স্পষ্টতঃই বুঝা যায়, সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, বা $\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ হইবে।

## 23. দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইবার সর্ত।

( Condition of parallelism of two straight lines. )

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে $\alpha = \beta$ হইবে। $\therefore \quad \theta = \alpha - \beta = 0$.

অতএব, $\tan \theta = \tan 0^\circ = 0$.

সুতরাং $m_1 - m_2 = 0$ [ সমীকরণ (1) হইতে ], বা $m_1 = m_2 \cdots$(A)

ইহাই সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হইবার নির্ণেয় সর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে দেখা যায়, $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ হইলে সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে। অর্থাৎ নির্ণেয় সর্ত হইল $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ldots\ldots$(B)

উপরের নির্ণীত সর্ত হইতে দেখা যায় যে উভয় সরলরেখার প্রবণতা ( gradient ) সমান হইলে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হয়।

[ অনুচ্ছেদ 11 (i) দেখ ]

## 24. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবার সর্ত।

( Condition of perpendicularity of two straight lines. )

$$\cot \theta = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$ [ 24নং চিত্র দেখ ]

এখন $\cot \alpha = \frac{1}{m_1}$ ও $\cot \beta = m_2$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{m_2}+1}{\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}} = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}.$$

এক্ষণে, $\theta=90°$ হইলে, $\cot\theta=0$, $\therefore \quad m_1m_2+1=0$,

বা, $m_1m_2=-1\cdots$(A) ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে অনুরূপে, $a_1a_2+b_1b_2=0\cdots$(B) সরলরেখাদ্বয়ের লম্ব হওয়ার সর্ত পাওয়া যায়।

[ **অন্য নিয়ম** ] 22 অনুচ্ছেদের চিত্র হইতে দেখা যায়, যখন $\theta=90°$, তখন $\alpha=90°+\beta$. $\therefore \tan\alpha=\tan(90°+\beta)=-\cot\beta=-\frac{1}{\tan\beta}$.

সুতরাং $\tan\alpha\,\tan\beta=-1$, বা, $m_1m_2=-1$.

**25. কার্যকর নিয়ম।**

$a_1x+b_1y+c_1=0$ সরলরেখাটি $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল হইবে যখন $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হইবে।

এখন, মনে কর, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$, $\therefore \quad a_1=a_2k$ এবং $b_1=b_2k$.

$a_1, b_1$ এর এই মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায়

$$a_2kx+b_2ky+c_1=0,$$

বা, $a_2x+b_2y+\frac{c_1}{k}=0$,

অর্থাৎ, $a_2x+b_2y+c'=0$ $\left[\text{ এখানে } c'=\frac{c_1}{k} \text{ (ধ্রুবক) }\right]$

অতএব, দেখা যাইতেছে সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে শুধু পার্থক্য ধ্রুবক পদে।

যেমন ধর, একটি সরলরেখার সমীকরণ $7x-3y+1=0$ দেওয়া আছে। এই রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $7x-3y+k=0$. এখন

$k$-এর মান দ্বিতীয় কোন সর্ত হইতে নির্ণয় করিলেই উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইবে।

**নিয়ম ঃ**—কোন রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় প্রদত্ত রেখার সমীকরণে শুধু ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করিবে।

আবার, উপরের সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে যখন,

$a_1a_2+b_1b_2=0$, বা $\dfrac{a_1}{b_1}=-\dfrac{b_2}{a_2}$ হইবে।

$\therefore\ a_1x+b_1y+c_1=0$, বা $\dfrac{a_1}{b_1}x+y+\dfrac{c_1}{b_1}=0$,

বা, $-\dfrac{b_2}{a_2}x+y+\dfrac{c_1}{b_1}=0$, বা, $-b_2x+a_2y+\dfrac{c_1a_2}{b_1}=0$,

অর্থাৎ $-b_2x+a_2y+c'=0$ $\left[\text{এখানে } c'=\dfrac{c_1a_2}{b_1} \text{ ( ধ্রুবক )}\right]$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণের $x$ ও $y$ এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোনটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া একটি ধ্রুবক পদ যোগ করিলেই উহা লম্ব হইবে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যাইবে। দ্বিতীয় কোন সর্ত ইহাতে আরোপ করিয়া ধ্রুবক পদটির মান নির্ণয় করিলেই সরলরেখাটি নির্দিষ্ট হইবে।

মনে কর, $2x+3y+1=0$ রেখার সহিত লম্ব সরলরেখার সমীকরণ বাহির করিতে হইবে।

এখানে $x$ ও $y$-এর সহগ দুইটি বিনিময় করিলে $3x$ ও $2y$ হয়। এখন উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া ধ্রুবক পদ যোগ করিতে হইবে ; সুতরাং সমীকরণটি হইবে $3x-2y+k=0$.

**নিয়ম ঃ**—প্রদত্ত একটি সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় $x$ ও $y$ এর সহগ দুইটি বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিবে এবং একটি নূতন ধ্রুবকপদ যোগ করিবে।

## 25. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।

[ To find the point of intersection of two given st. lines. ]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots(1)$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0\cdots(2)$

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু, উভয় সরলরেখার একটিমাত্র সাধারণ বিন্দু, সুতরাং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

মনে কর, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$.

সুতরাং, $a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\cdots(3)$

এবং $a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\cdots(4)$

এক্ষণে (3) ও (4) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\beta}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1o_2-a_2b_1}.$$

$\therefore \quad \alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $\beta=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, ইহাই নির্ণেয় স্থানাঙ্ক।

[ **দ্রষ্টব্য :** ছেদবিন্দুর নির্দিষ্ট মান পাওয়ার সর্ত $a_1b_2-a_2b_1\neq0$. কিন্তু যদি $a_1b_2-a_2b_1=0$, বা $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সরলরেখা দুইটি অসীম দূরত্বে ছেদ করিবে। আবার দেখ, 23 অনুচ্ছেদে বর্ণিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হইবার সর্তও $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. অতএব, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা অসীমে পরস্পর ছেদ করে, বলা যায়। ]

## ✓27. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[ To find the equation of a straight line passing through the point of intersection of two given straight lines. ]

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots(1)$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0\cdots(2)$

এক্ষণে, $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0\cdots(3)$ সমীকরণটি একঘাত সমীকরণ বলিয়া উহা একটি সরলরেখার সমীকরণ। এখানে $k$ যে-কোন ধ্রুবক হইতে পারে এবং উহার বিভিন্ন মান বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করিবে।

(1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

এই স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ-(3) সিদ্ধ হয়। অতএব, সরলরেখা-(3), (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে।

অতএব সমীকরণ-(3) সরলরেখা (1) ও (2) এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার নির্ণেয় সমীকরণ।

## 28. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হইবার সর্ত নির্ণয়।

[To find the condition of concurrence of three straight lines.]

মনে কর, সরলরেখা তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে

$$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots(1),$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0\cdots(2)$$

এবং $a_3x+b_3y+c_3=0\cdots(3)$.

(1) ও (2) সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

সমীকরণ-(3) যদি ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় সরলরেখাটি (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হইবে অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে। অর্থাৎ যদি

$$a_3\times\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_3\times\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+c_3=0 \text{ হয়},$$

বা, $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0\cdots(A)$,

ইহাই সরলরেখা তিনটির সমবিন্দু হইবার সর্ত।

(i) **ভিন্ন আকারে সর্ত।**

যদি $p, q, r$ এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায় যে সমীকরণ (1), (2) ও (3) এর বামপক্ষের রাশিকে যথাক্রমে $p, q$ ও $r$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল তিনটি যুক্ত করিলে আপনা হইতেই শূন্য হয়, তবে (1), (2) ও (3) দ্বারা যে তিনটি সরলরেখা সূচিত হইতেছে উহারা সমবিন্দু হইবে।

অর্থাৎ, যদি $p, q, r$ এর এমন তিনটি মান ( মান তিনটি সমান হইতে পারে কিন্তু শূন্য নহে ) পাওয়া গেল যে,

$$p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3)=0\ldots(B)$$

হয় ( আপনা হইতেই ) তবে, (1), (2) ও (3) সমবিন্দু হইবে।

অর্থাৎ, $x, y$ এর মান যাহাই হউক না কেন, (B) এর বামপক্ষ শূন্য হইবে। ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে $x$ ও $y$ এর সহগ দুইটি এবং ধ্রুবকটির প্রত্যেকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

মনে কর, সরলরেখা (1) ও (2)এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$.

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ \text{এবং}\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\end{array}\right\}$$

সুতরাং $p(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)+q(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)+$
$$r(a_3\alpha+b_3\beta+c_3)=0$$

( কারণ, $x, y$ এর যে-কোন মানেই (B) শূন্য হয়, কাজেই এক্ষেত্রে $x, y$-এর $\alpha, \beta$ মানেও (B) শূন্য হইবে।

$$\therefore\ a_3\alpha+b_3\beta+c_3=-\frac{p}{r}(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)-\frac{q}{r}(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$$

$$=-\frac{p}{r}\times0-\frac{q}{r}\times0 \quad \text{( B হইতে পাওয়া যায় )}$$

$$=0.$$

অতএব, সমীকরণ-(3) $\alpha, \beta$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ (1), (2) ও (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

[ **দ্রষ্টব্য :** তিনটি সরলরেখার সমীকরণ যখন এমনভাবে থাকে যে, দেখিলেই বুঝা যায়, $p, q, r$ এর মান কি ধরিলে $x, y$ এর সহগ দুইটি ও

ধ্রুবক পদটি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে আপনা আপনি শূন্য হয়, সেই সব ক্ষেত্রে সর্ত (B)এর উপযোগিতা খুব বেশী। অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় $p, q, r$ প্রত্যেকটির মান এক ধরিলেই সর্তটি সিদ্ধ হয়। তবে যখন (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটিতে $x, y$ প্রভৃতির সহগগুলি 1, 2, 3 প্রভৃতি সংখ্যা দ্বারা দেওয়া থাকে, তখন এই সর্ত আরোপ করা উচিত নহে। ]

নিম্নের উদাহরণমালা লক্ষ্য করিলেই কার্য্যকর নিয়মগুলি বুঝিতে পারিবে।

## উদাহরণমালা 4

উদা. 1. Find the equation of a straight line which passes through the point $(3, -4)$ and is parallel to the straight line $2x+3y+4=0$.

**১ম নিয়ম।** $2x+3y+4=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.

এক্ষণে, ঐ সরলরেখা $(3, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$2\times3+3\times-4+k=0, \text{ বা } k=6.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $2x+3y+6=0$.

**২য় নিয়ম।** $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y+4=m(x-3).\cdots\cdots(1).$$

সরলরেখা $2x+3y+4=0\cdots(2)$এর gradient $=-\frac{2}{3}$.

এখন সরলরেখা-(1) সরলরেখা-(2) এর সমান্তরাল হইলে $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y+4=-\frac{2}{3}(x-3)$, বা $2x+3y+6=0$.

উদা. 2. Find the equation of a straight line which passes through the point $(2, -1)$ and is perpendicular to the straight line $3x-2y=5$. [J. B. A.]

**১ম নিয়ম।** এখানে প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $3x-2y=5$.

ইহার উপর লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.

এক্ষণে, ঐ সরলরেখা $(2, -1)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$2\times2+3\times-1+k=0, \text{ বা } k=-1.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $2x+3y-1=0$.

**২য় নিয়ম।** $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y+1=m(x-2)\cdots\cdots(1)$$

এখন সরলরেখা $3x-2y=5\cdots\cdots(2)$ এর gradient $=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ সরলরেখা-(1) সরলরেখা-(2) এর উপর লম্ব হইতে হইলে $m\times\frac{3}{2}=-1$, বা $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y+1=-\frac{2}{3}(x-2)$, বা $2x+3y-1=0$.

**উদা. 3.** Find the equation of a straight line which passes through the point $(-3, -4)$ and is parallel to the straight line $x\cos 80°+y\sin 80°+7=0$.

$x\cos 80°+y\sin 80°+7=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\cos 80°+y\sin 80°+k=0$.

[ অনুচ্ছেদ 16 অনুসিদ্ধান্ত (iii) দেখ ]

এখন, ঐ সরলরেখা $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$-3\cos 80°-4\sin 80°+k=0, \text{ বা } k=3\cos 80°+4\sin 80°.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইবে

$$x\cos 80°+y\sin 80°+3\cos 80°+4\sin 80°=0,$$

অর্থাৎ, $(x+3)\cos 80°+(y+4)\sin 80°=0$.

**উদা. 4.** Find the equation of a straight line passing through the point $(2, 1)$ and perpendicular to the straight line $x\cos 6°+y\sin 6°=3$.

$x\cos 6°+y\sin 6°=3$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\sin 6°-y\cos 6°+k=0$.

এখন ঐ সরলরেখা $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলিয়া $2\sin 6°-\cos 6°+k=0$, বা, $k=\cos 6°-2\sin 6°$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইবে,

$$x \sin 60^\circ - y \cos 6^\circ + \cos 6^\circ - 2 \sin 6^\circ = 0,$$

বা $(x-2) \sin 6^\circ - (y-1) \cos 6^\circ = 0.$

উদা. 5. Find the equation to the perpendicular bisector of the segment joining the points $(4, -5)$ and $(-7, 3)$.

এখানে, $(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার

$$\text{প্রবণতা ( gradient )} = \frac{-5-3}{4-(-7)} = -\frac{8}{11}.$$

সুতরাং উহার উপর কোন লম্বের gradient হইবে $\frac{11}{8}$.

আবার, ঐ লম্ব $(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুগামী।

এখন, ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4-7}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$ বা $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$।

অতএব লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $y+1 = \frac{11}{8}\left(x+\frac{3}{2}\right)$

বা, $16y - 22x - 17 = 0.$

উদা. 6. If the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ passes through the point of intersection of the line $2x-y=1$ and $3x-4y+6=0$ and is parallel to the line $4x+3y-6=0$, find $a$ and $b$.

[ C. U. 1948 ]

$2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া $x=2$, $y=3$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ ঐ দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$। এখন $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হইবে $4x+3y+k=0$. যেহেতু ইহা $(2, 3)$ বিন্দুগামী, $\therefore\ 4\times2+3\times3+k=0$, বা $k=-17$. অতএব, সরলরেখার সমীকরণ $4x+3y-17=0$; ইহাকে intercept আকারে লিখিলে দাঁড়ায় $\frac{x}{\frac{17}{4}}+\frac{y}{\frac{17}{3}}=1$. ইহা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর সহিত অভিন্ন রেখা হইতে হইলে $a=\frac{17}{4}$ ও $b=\frac{17}{3}$ হইবে।

উদা. 7. Find the equation to the straight line which passes through the point (5, 4) and the point of intersection of the lines $2x+3y-1=0$ and $3x-4y+7=0$.

১ম নিয়ম। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=-1$ ও $y=1$. $\therefore$ উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

এখন, (5, 4) ও $(-1, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যে সরলরেখা যাইবে তাহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{y-4}{4-1}=\frac{x-5}{5-(-1)}, \text{ বা } \frac{y-4}{3}=\frac{x-5}{6}, \text{ বা, } x-2y+3=0.$$

$\therefore$ $x-2y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

২য় নিয়ম। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$2x+3y-1+k(3x-4y+7)=0$. ইহা (5, 4) বিন্দুগামী হইলে

$2.5+3.4-1+k(3.5-4.4+7)=0$ হইবে,

বা, $21+6k=0$, $\therefore$ $k=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে $2x+3y-1-\frac{7}{2}(3x-4y+7)=0$,

বা, $x-2y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 8. Find the equation of the line through the point of intersection of the lines $4x+y-4=0$ and $3x+2y-5=0$ and prependicular to the line $x-2y+1=0$.

১ম নিয়ম। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{8}{5}$.

$\therefore$ ঐ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$.

এখন, $x-2y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে-কোন সরল-রেখার সমীকরণ হইবে $2x+y+k=0$.

যেহেতু, ইহা $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $2\times\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+k=0$, $\therefore$ $k=-\frac{14}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $2x+y-\frac{14}{5}=0$ অর্থাৎ $10x+5y-14=0$.

২য় নিয়ম। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$ ; এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $4x+y-4+k(3x+2y-5)=0$, বা $(3k+4)x+(2k+1)y-(4+5k)=0\cdots(1)$.

এক্ষণে (1)-সরলরেখাটি $x-2y+1=0$ রেখার উপর লম্ব হইবে যদি $(3k+4)\times 1+(2k+1)\times -2=0$ হয় [ অনুচ্ছেদ 23 (B) দেখ ]

অর্থাৎ $k=2$ হয়।

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $4x+y-4+2(3x+2y-5)=0$,

বা, $10x+5y-14=0$.

উদা. 9. (a). Find the equation of the straight line passing through the intersection of the lines $x-2y-b=0$ and $x+3y-2b=0$ and parallel to the line $3x+4y=0$.

১ম নিয়ম। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$.

এখন $3x+4y=0$ রেখাটির সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $3x+4y+k=0$, ইহা $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$3\times\frac{7b}{5}+\frac{4b}{5}+k=0 \text{ হইবে}, \quad \therefore \quad k=-5b.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x+4y-5b=0$.

২য় নিয়ম। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হয়

$$(x-2y-b)+k(x+3y-2b)=0$$

বা, $(k+1)x+y(3k-2)-b(2k+1)=0\cdots\cdots(1)$.

এখন (1)-সরলরেখাটি $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল হইবে

যখন $\frac{k+1}{3}=\frac{3k-2}{4}$ হইবে [ অনুচ্ছেদ 23 (B) দেখ ]

বা, $k=2$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $(2+1)x+(6-2)y-b(4+1)=0$

বা, $3x+4y-5b=0$.

উদা. 9. (*b*) Find the lines through the point of intersection of $y-2x+2=0$ and $y-3x+5=0$, which are at a distance of $\frac{7}{\sqrt{2}}$ from the origin. [U.P.B. 1942]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=4$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4). ঐ ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $(y-4)=m(x-3)$, বা $mx-y+(4-3m)=0$.

মূলবিন্দু (0, 0) হইতে ঐ সরলরেখার লম্বদূরত্ব $=\dfrac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}$

এক্ষেত্রে, $\dfrac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, বা $\dfrac{16+9m^2-24m}{1+m^2}=\dfrac{49}{2}$,

বা, $31m^2+48m+17=0$, বা $(31m+17)(m+1)=0$,

$\therefore\ m=-1$, বা $-\frac{17}{31}$.

$m=-1$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-1(x-3)$, বা $x+y=7$,

এবং $m=-\frac{17}{31}$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-\frac{17}{31}(x-3)$,

বা $31y+17x=175$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x+y=7$ এবং $17x+31y=175$.

উদা. 10. (*a*). Prove that the lines $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ and $4x+3y-4=0$ are concurrent.

$2x-y+8=0$ ও $3x+y+2=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(-2, 4)$।

এখন, যদি $(-2, 4)$ বিন্দু দ্বারা $4x+3y-4=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় সরলরেখাও প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুগামী হইবে, অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে।

এক্ষণে, $4x+3y-4=4(-2)+3(4)-4=-8+12-4=0$.

অতএব, দেখা গেল তৃতীয় সমীকরণটি $(-2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হইল।

সুতরাং, তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু।

(*b*) Prove that the lines $(b+c)x+ay-d=0$, $(c+a)x+by-d=0$ and $(a+b)x+cy-d=0$ are concurrent.

এখানে $(b+c)x+ay-d=0\cdots(1)$

$(c+a)x+by-d=0\cdots(2)$

এবং $(a+b)x+cy-d=0\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে যদি $p, q, r$ এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায়, যে

আপনা হইতেই $p\{(b+c)x+ay-d\}+q\{(c+a)x+by-d\}$
$+r\{(a+b)x+cy-d\}=0$ হয়$\cdots$(A)

এখানে $x$ এর সহগ $p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)\cdots(4)$

$y$ এর সহগ $pa+qb+rc$ ·· ··· $\cdots(5)$

এবং ধ্রুবক পদ $(p+q+r)d$ ··· ··· $\cdots(6)$

এখন, $p, q, r$ এর মান এমন হওয়া চাই যে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকটি রাশি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে, $p=b-c$, $q=c-a$, এবং $r=a-b$ হইলে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকেই শূন্য হয় অর্থাৎ (A)-ও তৎক্ষণাৎ শূন্য হয়।

অতএব, (1), (2) এবং (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

**উদা. 11.** For what value of $m$ will the lines $y=3x-1$, $2y=x+3$ and $3y=mx+4$ be concurrent? [C. U. '40 and '55]

$y=3x-1$ ও $2y=x+3$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই (1, 2)।

এখন, $3y=mx+4$, রেখাটি প্রথম দুইটি রেখার সহিত সমবিন্দু হইবে যখন তৃতীয় সমীকরণটি (1, 2) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\quad 6=m+4, \text{ বা } m=2.$$

অতএব দেখা গেল তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হইবে যখন $m=2$ হইবে।

**উদা. 12.** Find the equation to the straight line which passes through the intersection of the straight lines

$3x-4y+1=0$ and $5x+y-1=0$ and cuts off equal intercepts from the axes.

[C. U. B. Sc. 1947]

$3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ এই রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$$3x-4y+1+k(5x+y-1)=0,$$

বা, $$(5k+3)x+(k-4)y-(k-1)=0 \cdots (1)$$

ইহাকে ছেদিতাংশরূপ ( intercept form ) সমীকরণে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\dfrac{x}{\frac{k-1}{5k+3}}+\dfrac{y}{\frac{k-1}{k-4}}=1.$

$\because$ (1)-সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ কাটিয়া লয়

$\therefore \dfrac{k-1}{5k+3}=\dfrac{k-1}{k-4}, \ \therefore \ k=1$, বা $-\frac{7}{4}$.

এখন দেখা যায় সমীকরণ-(1) এ $k=1$ বসাইলে ধ্রুবক পদ $k-1=0$ হয়, তাহাতে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হয় অর্থাৎ অক্ষদ্বয় হইতে কোন অংশই ছেদ করে না। সুতরাং এক্ষেত্রে $k=1$ হইতে পারে না।

অতএব, $k=-\frac{7}{4}$ ধরিয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হইবে

$$(5\times -\tfrac{7}{4}+3)x+(-\tfrac{7}{4}-4)y-(-\tfrac{7}{4}-1)=0,$$

বা $-\frac{23}{4}x-\frac{23}{4}y+\frac{11}{4}=0$, অর্থাৎ $23x+23y-11=0$.

**উদা. 13.** Find the acute angle between the lines $2x+y-3=0$ and $x+3y+2=0$.

মনে কর, $2x+y-3=0$ ও $x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি $\theta$.

[ 22 (*b*) অনুচ্ছেদে, সূত্র (2)-তে দেখানো হইয়াছে

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$. এক্ষেত্রে কোণটি সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore$ এমনভাবে $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ মানগুলি লইতে হইবে যাহাতে $a_2b_1-a_1b_2$ ধনাত্মক হয়। ]

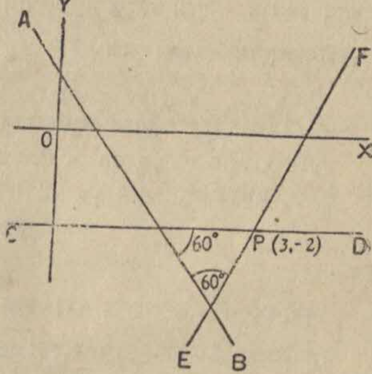
$$\text{এখানে } \theta=\tan^{-1}\frac{2\times3-1\times1}{2\times1+3\times1}=\tan^{-1}1=45^\circ$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণটি 45°.

**উদা. 14.** Find the equations to the straight lines which pass through $(3, -2)$ and make an angle of 60° with the line $\sqrt{3}x+y=1$.

[ চিত্রে AB হইল সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$, P হইল বিন্দু $(3, -2)$. AB সরলরেখার সহিত 60° কোণ করিয়া CPD ও EPF দুইটি সরলরেখা আছে। ইহাদের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে রাখিবে চিত্র অঙ্কন করিবার কোন প্রয়োজন নাই। কিভাবে দুইটি সরলরেখা, প্রদত্ত সরলরেখার সহিত একই কোণে নত থাকে তাহা দেখাইবার জন্য চিত্র দেওয়া হইল। ]




( চিত্র নং 25 )

$(3, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y+2=m(x-3)\cdots(1)$

যেহেতু (1)-রেখাটি, সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$ এর সহিত 60° কোণে নত আছে,

$$\therefore\ \tan 60^\circ=\frac{m-(-\sqrt{3})}{1+m(-\sqrt{3})}\cdots\text{(i) এবং } \tan 60^\circ=\frac{-\sqrt{3}-m}{1+m(-\sqrt{3})}\cdots\text{(ii)}$$

(i) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$, $\therefore\ m=0.$

(ii) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{-m-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$,

বা, $\sqrt{3}-3m=-m-\sqrt{3}$, $\therefore\ m=\sqrt{3}.$

এখন সমীকরণ-(1) এ, একবার $m=0$ ও আবার $m=\sqrt{3}$ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যায়, $y+2=0$

এবং $y+2=\sqrt{3}(x-3)$, বা, $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$.

অতএব, $y+2=0$ এবং $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়।

[ **দ্রষ্টব্য :** এখানে $m$-এর মান অজ্ঞাত। উহা $-\sqrt{3}$ হইতে বড় বা ছোট হইতে পারে।

$\therefore$ (i) ও (ii) তে $m$ হইতে $-\sqrt{3}$ একবার বিয়োগ করা হইয়াছে এবং আর একবার $-\sqrt{3}$ হইতে $m$ বিয়োগ করা হইয়াছে। ইহার ফলেই সম্ভাব্য দুইটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ]

**উদা. 15.** Verify that the three lines $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$, $y+\sqrt{3}x=4$ form an equilateral triangle. [ C. U. 1957 ]

Also, find the area of the triangle formed

সমীকরণ তিনটি $y=2 \quad \cdots(1)$

$y=\sqrt{3}x+5 \quad \cdots(2)$

এবং $y=-\sqrt{3}x+4 \cdots(3)$

সমীকরণ-(1) $x$-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

সমীকরণ-(2) এমন রেখা যাহার gradient $=\sqrt{3}$, সুতরাং $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ বলিয়া ইহা $x$-অক্ষের ধনাত্মকদিকের সহিত $60^\circ$ কোণে নত।

সমীকরণ-(3) এমন একটি সরলরেখা যাহার gradient $=-\sqrt{3}$, সুতরাং ইহা $x$-অক্ষের ধনাত্মকদিকের সহিত $120^\circ$ কোণে নত।

অতএব, (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় $x$-অক্ষের সমান্তরাল (1)-সরলরেখার সহিতও যথাক্রমে $60^\circ$ ও $120^\circ$ কোণে নত ; অর্থাৎ সরলরেখাদ্বয় (2) ও (3) পরস্পরের দিকে সরলরেখা-(1) এর সহিত $60^\circ$ কোণে নত।

দেখা যাইতেছে (1), (2) ও (3) তিনটি সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের দুইটি কোণের প্রত্যেকটি $=60^\circ$, $\therefore$ তৃতীয় কোণও $60^\circ$ হইবে।

অতএব, ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[ এই অঙ্কটিতে (1), (2), ও (3) এর ছেদবিন্দু তিনটি বাহির করিয়া বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য সমান দেখাইয়াও ইহা একটি সমবাহু ত্রিভুজ প্রমাণ করা যায়। ]

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানাই যথেষ্ট, কারণ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ( $a=$বাহুর দৈর্ঘ্য )।

এখানে, $y=2$ সরলরেখার সহিত (2) ও (3) যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহা স্থির করিতে (2) ও (3)-এ $y=2$ বসাইবে।

$\therefore$ (2) হইতে $x=-\sqrt{3}$ এবং (3) হইতে $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ পাওয়া যায়।

উভয় বিন্দুরই কোটি $=2$. সুতরাং, উভয় বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

অতএব, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{12}\sqrt{3}$ বর্গ একক।

**উদা. 16.** Prove analytically that the perpendicular bisectors of the sides of any triangle are concurrent.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$।

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D মনে কর। $\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. BC এর gradient $=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$.

সুতরাং BC'র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের (অর্থাৎ D বিন্দুগামী ও BC'র উপর লম্বের) সমীকরণ $y-\frac{y_2+y_3}{2}=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$

$$\left[\text{এখানে BC'র উপর লম্বের gradient } m=-\frac{1}{\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}}\right],$$

বা, $2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)-(x_2^2-x_3^2)-(y_2^2-y_3^2)=0\cdots(1)$

[ সরল করিয়া ]

অনুরূপে, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F ধরিয়া, বাহু দুইটির লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যায়,

$2x(x_3-x_1)+2y(y_3-y_1)-(x_3^2-x_1^2)-(y_3^2-y_1^2)=0\cdots(2)$
এবং $2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)-(x_1^2-x_2^2)-(y_1^2-y_2^2)=0\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়। [ অনুচ্ছেদ 28 এর (B) অনুসারে এখানে $p=q=r=1$ ] সুতরাং (1), (2) ও (3) রেখা তিনটি সমবিন্দু।

অতএব, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 17. Find the distance from (2, 3) measured along the line $3x-5y+9=0$ upto its point of intersection with $3x-2y=7$.

$3x-5y+9=0\cdots(1)$, বা $y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$, $\therefore$ রেখাটির gradient $\frac{3}{5}$

অর্থাৎ, সরলরেখাটি $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত থাকিলে, $\tan\theta=\frac{3}{5}$.

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{5}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{34}};$$

সুতরাং $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$ এবং $\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

এখন মনে কর, (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$\dfrac{x-2}{\cos\theta}=\dfrac{y-3}{\sin\theta}=r$ [ (2, 3) বিন্দু হইতে রেখা-(1) ও $3x-2y=7$ রেখার ছেদবিন্দু P $(x, y)$ এর দূরত্ব $=r$; অনুচ্ছেদ 21 দেখ। ]

$\therefore\quad x=2+r\cos\theta$ এবং $y=3+r\sin\theta$,

বা, $x=2+\dfrac{5}{\sqrt{34}}r$ এবং $y=3+\dfrac{3}{\sqrt{34}}r$.

এক্ষণে, P বিন্দুটি $3x-2y=7$ এরও একটি বিন্দু হওয়ায়

$$3\left(2+\frac{5r}{\sqrt{34}}\right)-2\left(3+\frac{3r}{\sqrt{34}}\right)=7,$$

বা, $6+\dfrac{15}{\sqrt{34}}r-6-\dfrac{6}{\sqrt{34}}r=7$, বা $\dfrac{9}{\sqrt{34}}r=7$,

$\therefore\quad r=\frac{7}{9}\sqrt{34}$, ইহাই নির্ণেয় দূরত্ব।

[ এখানে সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া ঐ ছেদবিন্দু হইতে (2, 3) এর দূরত্ব নির্ণয় করিলেও হইত। ]

18. Show that the distance of the point $(x_0, y_0)$ from the line $ax+by+c=0$ measured parallel to a line making an angle $\theta$ with $x$-axis is $-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$. [C. U. 1954]

$x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত সরলরেখার সমান্তরাল $(x_0, y_0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_0=\tan\theta(x-x_0)$

বা, $\dfrac{x-x_0}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_0}{\sin\theta}$. ......(1)

এখন (1)-রেখা বরাবর $(x_0, y_0)$ হইতে $ax+by+c=0$ রেখার দূরত্ব $=r$ ধরিলে পাওয়া যায় $\dfrac{x-x_0}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_0}{\sin\theta}=r$.

$\therefore\ x=x_0+r\cos\theta$ এবং $y=y_0+r\sin\theta$.

যেহেতু $(x_0, y_0)$বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখারও একটি বিন্দু,

সুতরাং, $a(x_0+r\cos\theta)+b(y_0+r\sin\theta)+c=0$,

বা, $r(a\cos\theta+b\sin\theta)=-(ax_0+by_0+c)$

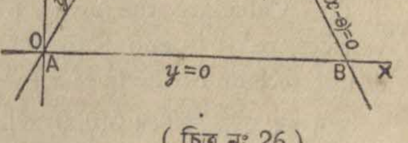
$$\therefore\ r=-\frac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}.$$

19. Verify that the four lines $y=0$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0$, $y=2$ and $y-\sqrt{3}x=0$ is a trapezium, which is cyclic.

Find the co-ordinates of the four vertices and also the area of the trapezium.

সমীকরণগুলি $y=0\cdots(1)$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0\cdots(2)$,
$y=2\cdots(3)$ এবং $y-\sqrt{3}x=0\cdots\cdots\cdots(4)$

এখানে, সমীকরণ-(1) হইল $x$-অক্ষ এবং সমীকরণ-(3) হইল $x$-অক্ষ হইতে 2 একক দূরে $x$-অক্ষের সহিত সমান্তরাল রেখা।



(চিত্র নং 26)

সমীকরণ (2) ও (4) এর gradient বা $m$এর মান যথাক্রমে $-\sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}$; সুতরাং এই দুই সরলরেখা $x$-অক্ষের সহিত অর্থাৎ $y=0$ সরলরেখার সহিত যথাক্রমে 120° ও 60° কোণে নত।

সুতরাং ইহারা $y=2$ রেখার সহিতও $120°$ ও $60°$ কোণে নত আছে। অতএব, (1), (2), (3) ও (4) রেখা চতুষ্টয় দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটির দুইটি বাহু সমান্তরাল ও অপর বাহু দুইটি তির্যক হওয়ায় চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়ম। আবার, যেহেতু তির্যক বাহু দুইটি সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে সুতরাং ট্রাপিজিয়মটি বৃত্তস্থ।

মনে কর, (1) ও (4) এর ছেদবিন্দু A, (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B, (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু C এবং (3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D. [ চিত্র দেখ ]

(1) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল (0, 0),

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া B বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল (8, 0),

(2) ও (3) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া C বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$

এবং (3) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া D বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$.

$\therefore$ AB $=8$ এবং CD $=\sqrt{\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(2-2)^2}=8-\frac{4}{\sqrt{3}}$.

অতএব, ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব

$=\frac{1}{2}\left(8+8-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\times 2=16-\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}(12-\sqrt{3})$ বর্গ একক।

20. Calculate the area of the triangle of which two vertices are (0, 0) and (9, 0) and the third vertex is the point of intersection of the lines $x+y-8=0$ and $7x-2y-2=0$.

মনে কর, দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0, 0) ও B(9, 0), $\therefore$ AB বাহু $=9$ একক।

তৃতীয় শীর্ষবিন্দু C ধরিলে $x+y-8=0$ ও $7x-2y-2=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া উহার স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় (2, 6)। স্পষ্টতঃ C বিন্দু হইতে AB বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য C বিন্দুর কোটি 6.

অতএব, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 9 \times 6$ বর্গ একক $=27$ বর্গ একক

## Exercise

1. (*a*) Find the equation to the line parallel to $x$-axis and passing through the point (4, 7).

(*b*) Find the equation to the line passing through the point $(-3, 4)$ and parallel to the $y$-axis.

2. Find the angle between the lines :

(i) $2y-x=3$ and $y=\frac{1}{3}x+5$.

(ii) $y=2x+3$ and $3y=x+6$.

(iii) $ax-by+c=0$ and $(a-b)x-(a+b)y+c=0$.

(iv) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

(v) $x\cos 25^\circ + y\sin 25^\circ - 7=0$ and
$x\sin 25^\circ - y\cos 25^\circ + 7=0$.

3. Find the co-ordinates of the point of intersection of the lines :

(i) $2x-3y+5=0$ and $7x+4y-3=0$. [Utkal, 1947]

(ii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ and $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. [C. U. 1943]

(iii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ and $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$. [C. U. 1941]

Also find the equation to the straight line through this point of intersection and cutting both the axes at an angle of 45°.

(iv) $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ and $x\cos\phi+y\sin\phi=p$.

4. Find the equation to the straight line passing through :

(*a*) the point (3, 5) and parallel to the line $4x-3y+1=0$. [C. U. 1947]

(*b*) the point (3, 4) and perpendicular to the line $4x-3y+1=0$. [C. U. 1956]

(*c*) the point (3, 2) and the point of intersection of the lines $3x+y-5=0$ and $x+5y+3=0$. [C. U. 1942]

(*d*) the point (1, 2) and the point of intersection of the line $x+3y+1=0$ and $2x+7y+3=0$. [C. U. 1946]

(*e*) the origin and the intersection of the straight lines $2x+3y=1$ and $x-y=2$. [C. U. 1933]

(*f*) the point of intersection of $25x+41y-8=0$ and $5x+7y+9=0$, and parallel to the line $2x+3y+7=0$. [U. P. B. 1941]

(*g*) the point of intersection of $x+2y=0$ and $y+4x+7=0$ which is perpendicular to the straight line $3x-y=0$. [C. U. 1932]

(*h*) the point of intersection of the lines $x+2y+3=0$ and $3x+4y+7=0$ and is perpendicular to the straight line $y-x=8$. [C. U. 1940 : U. P. B. 1949]

(*i*) the origin and the point of intersection of the lines $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ and $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$. [U. P. B. 1948]

(j) the point of intersection of the lines $2x-3y+4=0$ and $3x+4y-5=0$, and perpendicular to the straight line $6x-7y+8=0$. [C. U. 1930, '44]

(*k*) the point of intersection of the lines $2x-y+5=0$ and $x+y+1=0$ and the point of intersection of $2x+y-5=0$ and $x-y-7=0$.

5. Prove that the following sets of three lines are concurrent ; also find the respective points of concurrence.

(*a*) $x+y+1=0$ ; $2x+3y+1=0$ ; $3x+4y+2=0$.

(*b*) $4x-3y-31=0$ ; $7x-5y-56=0$ ; $11x-9y-80=0$.

(c) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ; $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ; $x=y$.

(*d*) $ax+(b+c)y-d=0$ ; $bx+(c+a)y-d=0$ ; $cx+(a+b)y-d=0$.

(*e*) $2x-7y+11=0$ ; $3x-2y+1=0$ ; $x-12y+21=0$.

[C. U. 1945]

6. (*a*) Find the value of $p$ so that $3x+y-2=0$, $px+2y+3=0$ and $2x-y-3=0$ may be concurrent.

(*b*) Find the value of $k$ for which the three lines $2x-3y+k=0$, $3x-4y-1=0$ and $4x-5y-2=0$ may be concurrent.

(c) Show that the lines joining the origin to the point (2, 3) is concurrent with the straight lines $5x-3y=2$ and $x+y=10$. [Andhra, 1947]

(*d*) Verify that the three lines $x-y-7=0$, $x+2y+6=0$ and $2x+y-1=0$ pass through a common point and that this point is equidistant from $(5, -4)$, $(3, -2)$ and $(1, -6)$. [C. U. 1956]

7. Prove that the three lines given by $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ and $cx+ay+b=0$ will be concurrent if $a+b+c=0$.

8. Prove that the following pairs of lines are parallel :

(*a*) $3x+2y+5=0$ and $6x+4y-7=0$.

(*b*) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $bx+ay=c$.

9. Prove that the following pairs of lines are perpendicular to each other :

(*a*) $4x-5y+7=0$ and $10x+8y+3=0$.

(*b*) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ and $\frac{2x}{5}-\frac{y}{2}=1$.

10. Find the equation of the straight line passing through the point (3, 2) and the intersection of the lines $3x+y-5=0$ and $x+5y+3=0$. Find also the area of the triangle cut off from the co-ordinate axes by this line.

[C. U. 1942]

11. Find the equation of the line which divides internally the line joining $(-3, 7)$ to $(5, -4)$ in the ratio $4:7$ and is perpendicular to this line.

12. Show that the area of the triangle formed by the straight lines whose equations are $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ and $x=0$ is $\frac{1}{2}\,\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$.

[C. U. 1955]

13. Show that the lines $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$, $(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$ and $x+y=0$ form an isosceles triangle whose vertical angle is $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$.

Determine the co-ordinates of its centroid. [C. U.]

14. (*a*) Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four straight lines $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ and $\sqrt{3}y+x=1$ are at right angles to one another.

[C. U. 1953]

(*b*) Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ are at right angles to one another. [C. U.]

15. Find the equations to the straight lines—

(*a*) which pass through (3, 2) and are inclined at an angle of 45° to the straight line $x=2y+4$.

(*b*) passing through (7, 9) and inclined at an angle of 60° to the straight line $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$.

(*c*) which pass through the origin and are inclined at 75° to the straight line $x+y+\sqrt{3}(y-x)=a$.

(*d*) Find the equation to the line through the origin perpendicular to $x \cos \theta + y \sin \theta = p$.

16. Through the point (3, 4) are drawn two straight lines each inclined at 45° to the straight line $x - y = 2$. Find their equations and find the area included by the three lines.

17. Find the equations to the two straight lines which pass through the point (4, 5) and make equal angles with the two straight lines $3x = 4y + 7$ and $5y = 12x + 6$.

18. Two straight lines pass through the point (−2, 5) such that one of them makes an angle of $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ with the given line $x - y + 5 = 0$ and the given line makes an angle of $\tan^{-1} \frac{2}{3}$ with the other line. Find the equations to the two lines.

19. (*a*) Find the perpendicular distance from the origin of the perpendicular from the point (1, 2) upon the straight line $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$.

(*b*) Find the equations of two straight lines each 5 inches distant from the origin and inclined at an angle of 30° to the *x*-axis. What lengths do these lines intercept on the axes ? [ J. B. A. ]

20. (a) Find the distance from (3, 8) measured along the line $4x - 3y + 12 = 0$ to the point where this line intersects the line $4x + 5y = 60$.

(*b*) Find the distance from the point (−2, 7) measured along the straight line $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1$ upto its point of intersection with the line $y = x + 2$.

21. Find the equation to the straight line which passes through the point P (4, 3) and is parallel to the line $5x - 12y + 7 = 0$ ; also determine the length intercepted on this line between the point P and the straight line $x + y = 24$.

22. Find the area of the triangle, two of whose vertices are the points (3, 0) and (15, 0) and the third vertex is

the point of intersection of the lines $4x+3y=0$ and $5x+4y-1=0$.

23. Show that the lines $y=0$, $\sqrt{3}y+x-10=0$, $y=\sqrt{3}$ and $\sqrt{3}y-x=0$ form a cyclic trapezium. Calculate the co-ordinates of the vertices and also the area of the trapezium.

24. Find the equations to the diagonals of the rectangle the equations of whose sides are $x=a$, $x=a'$, $y=b$ and $y=b'$.

[ C. U. 1951]

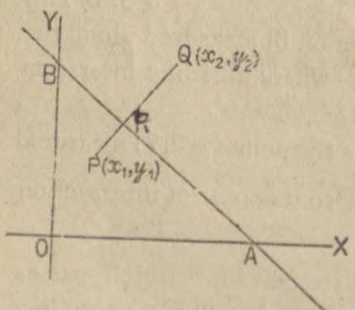
25. Show that the point of intersection of the straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ is the vertex of a square whose adjacent sides are along the axes of co-ordinates unless $a+b=0$.

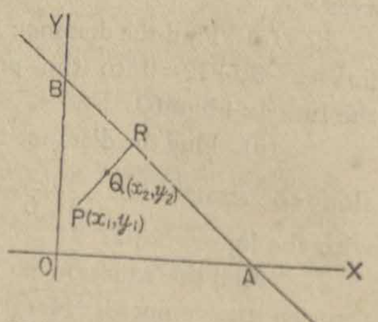
[C. U. 1952]

## Straight lines

29. প্রদত্ত একটি সরলরেখার তুলনায় একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

[ To find the position of a point in relation to a given straight line ].




( চিত্র নং 27 )

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+c=0$ এবং ইহা অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রথমতঃ মনে কর, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় AB রেখার উভয় পার্শ্বে আছে [ প্রথম চিত্র ]।

PQ যুক্ত করিলে উহা যেন AB রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর R বিন্দুতে PQ রেখা $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল অর্থাৎ $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু AB রেখার উপর অবস্থিত

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2+nx_1}{m+n}+b.\frac{my_2+ny_1}{m+n}+c=0,$$

বা, $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=-\frac{m}{n}$ [ সরল করিয়া ]……(1)

দ্বিতীয়তঃ মনে কর, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ AB রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত [ দ্বিতীয় চিত্র ]।

এখানে, PQ যুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে ABকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং PQ রেখা R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইল মনে কর, অর্থাৎ $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু AB সরলরেখার উপর অবস্থিত

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+b.\frac{my_2-ny_1}{m-n}+c=0,$$

বা, $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=+\frac{m}{n}$. [ সরল করিয়া ]……(2)

যেহেতু $\frac{m}{n}$ ধনাত্মক, $\therefore$ $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ অনুপাতটি (1)এ ঋণাত্মক এবং (2)এ ধনাত্মক। ইহা হইতে বেশ বুঝা গেল যে, প্রথম ক্ষেত্রে $ax_1+by_1+c$ ও $ax_2+by_2+c$ রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উহারা একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ সরল রেখার একই পার্শ্বে থাকিবে যখন $ax_1+by_1+c$ ও $ax_2+by_2+c$ রাশি দুইটি একই চিহ্নযুক্ত হইবে। কিন্তু বিন্দু দুইটি বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, ঐ রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

**অনুসিদ্ধান্ত।** কোন একটি বিন্দু, প্রদত্ত সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে আছে নির্ণয় করিতে সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে অথবা তাহার বিপরীত পার্শ্বে বিন্দুটি আছে তাহাই নির্ণয় করা হয়।

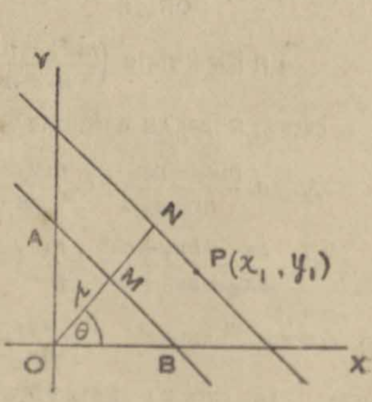
ইহা করিতে হইলে সমীকরণের রাশিটিতে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) ও প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া রাশিটির চিহ্ন দেখিতে হয়। যখন উভয় ক্ষেত্রে একই চিহ্ন হয় তখন বলা হয় সরলরেখার যে-পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বেই বিন্দুটিও আছে ( origin side ) এবং যখন উভয় ক্ষেত্রে বিপরীত চিহ্ন হয় তখন বলা হয় বিন্দুটি, সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত দিকে আছে ( non-origin side )।

**30.** কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা AB-র উপর মূলবিন্দু O হইতে OM লম্ব এবং $\angle XOM=\theta$.

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এর মধ্য দিয়া AB-র সমান্তরাল PN টানা হইল এবং বর্ধিত OM যেন PN-কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন ON⊥PN হইল।

অতএব, P হইতে AB-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য = MN.




( চিত্র নং 28 )

মনে কর, OM = $p$ এবং ON = $p_1$.

(1) এক্ষণে, AB সরলরেখার সমীকরণ হইল

$x \cos \theta + y \sin \theta = p$ ( যেখানে $p = OM$ )

আবার, $ON = p_1$ এবং PN ∥ AB বলিয়া PNএর সমীকরণ হইল

$x \cos \theta + y \sin \theta = p_1$.

∵ ঐ সরলরেখা $(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে,

∴ $x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta = p_1$.

∴ নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য $= MN = ON - OM = p_1 - p$

$$= \boldsymbol{x}_1 \cos \theta + \boldsymbol{y}_1 \sin \theta - \boldsymbol{p} \cdots (1)$$

(2) মনে কর, AB-এর সমীকরণ $ax + by + c = 0$

[ $c$ ঋণাত্মক হয় এইরূপে লেখা হইল ]

$$\therefore \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

$$\therefore \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

∴ $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য

$= x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - p$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot x_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot y_1 + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ** (i) এখানে যদি P বিন্দুটি ( সুতরাং PN সরলরেখা ) মূলবিন্দু O এবং AB-এর মধ্যে থাকিত, তবে তখন লম্বের দৈর্ঘ্য ( অর্থাৎ MN ) $= p - p_1 = -(p_1 - p)$ হইত।

অতএব, P হইতে নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য $= \pm(p_1 - p) = \pm \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

এখানে দেখা যাইতেছে যে, AB ও P বিন্দুর ( অর্থাৎ PN এর ) একই পার্শ্বে মূলবিন্দু O থাকিলে, উহাদের $x$- ও $y$-ছেদিতাংশের চিহ্ন একই হইবে। উভয় ক্ষেত্রেই লম্বটির দৈর্ঘ্য $p$ ও $p_1$এর অন্তরফলের সমান হইবে।

ঐ AB ও PN রেখাদ্বয় উভয়ই যে-কোন একটি পাদে অবস্থিত থাকিয়া অক্ষদ্বয়কে ছেদ করিতে পারে।

(ii) যদি O মূলবিন্দুটি AB ও PN এর ( অর্থাৎ P বিন্দুর ) মধ্যে থাকে, তবে উহাদের $x$- ও $y$-ছেদিতাংশের চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হইবে। এক্ষেত্রে লম্বের দৈর্ঘ্য $p_1$ ও $p$-এর সমষ্টির সমান হইবে।

$$\therefore \text{ লম্বের দৈর্ঘ্য} = \pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

এরূপ স্থলে AB ও PNএর মধ্যে একটি প্রথম পাদে এবং অপরটি তৃতীয় পাদে থাকিয়া, অথবা একটি দ্বিতীয় পাদে এবং অন্যটি চতুর্থ পাদে থাকিয়া অক্ষদ্বয়কে ছেদ করিতে পারে।

(iii) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), স্থতরাং $\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$এ $x_1=0$ ও $y_1=0$ বসাইলে মূলবিন্দু হইতে $ax+by+c=0$ সরলরেখার (অর্থাৎ AB এর) উপরে লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \text{ ঐ লম্বের দৈর্ঘ্য} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(iv) ত্রিকোণমিতিতে যে সরলরেখাটি ঘুরিয়া কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ধনাত্মক ধরা হয়। সেইরূপ প্রচলিত প্রথায় স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বকে সতত ধনাত্মক ধরা হয়।

অতএব, এই প্রথা অনুসারে কোন বিন্দু ও মূলবিন্দু কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, ঐ বিন্দুদ্বয় হইতে সরলরেখাটির উপর লম্বদ্বয়ের একই চিহ্ন হইবে অর্থাৎ ঐ বিন্দু হইতে লম্বটি ধনাত্মক হইবে। আর যদি ঐ প্রদত্ত বিন্দু ও মূলবিন্দু সরলরেখাটির পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে লম্ব দুইটির চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হইবে অর্থাৎ ঐ বিন্দু হইতে লম্বটি ঋণাত্মক হইবে।

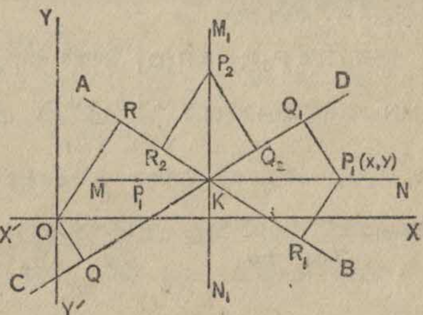
এই নিয়মটি স্মরণ রাখিবে এবং এই নিয়ম প্রয়োগের সময় সরলরেখার সমীকরণটিকে এরূপে প্রকাশ করিবে যেন উহার ধ্রুবক পদটি ( অর্থাৎ $x$ ও $y$ বর্জিত পদটি ) ধনাত্মক হয়।

31. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়।

[ To find the equation of the st. line bisecting the angle between two straight lines. ]

XOX′ ও YOY′ দুইটি অক্ষ এবং O মূল বিন্দু। মনে কর AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর K বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, এবং AB ও CDর সমীকরণদ্বয় যথাক্রমে $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$.

AB ও CDর অন্তর্ভূক্ত সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে MN ও $M_1N_1$ টানা হইল।




( চিত্র নং 29 )

মনে কর, AB ও CDর অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর P একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (X, Y). অতএব P হইতে AB ও CD-র লম্ব-দূরত্ব সমান হইবে।

$$\therefore \quad \frac{a_1X+b_1Y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2X+b_2Y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ldots\ldots(1)$$

এক্ষণে, P বিন্দু যদি MN সমদ্বিখণ্ডকের উপর ( ধর $P_1$ বিন্দুতে ) অবস্থিত হয়, তবে $P_1$ হইতে AB ও CDর উপর লম্ব দুইটির চিহ্ন ( sign ) দুইটির উভয়ই O হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের চিহ্নের অনুরূপ ( একই ) অথবা উভয়ই উহাদের বিপরীত হইবে, অর্থাৎ উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক

হইবে ( চিত্র 29এ দেখ )। আর যদি P বিন্দু অপর সমদ্বিখণ্ডকের উপর ( ধর $P_2$ বিন্দুতে ) অবস্থিত হয়, তবে $P_2$ হইতে অঙ্কিত কেবল একটি লম্ব O হইতে অঙ্কিত লম্বের অনুরূপ বা একই চিহ্নযুক্ত হইবে, অর্থাৎ একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

এখন, $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ এই সমীকরণদ্বয় $x$ ও $y$ এর একঘাত সমীকরণ, সুতরাং উহাদের দ্বারা দুইটি সরলরেখা সূচিত হয়। আবার, ঐ সমীকরণদ্বয় (X, Y) স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়, সুতরাং (X, Y) বিন্দুটি ঐ সরলরেখাদ্বয়ের উপর অবস্থিত। অতএব, ঐ সমীকরণ দুইটিই এখানে সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের উদ্দিষ্ট সমীকরণ হইল।

[ **দ্রষ্টব্য :** প্রদত্ত চিত্রে $P_1R_1$ ও $P_1Q_1$ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক বলিয়া MN এর সমীকরণ হইবে $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.
আর, $P_2R_2$ ও $P_2Q_2$ এর একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক বলিয়া $M_1N_1$ এর সমীকরণ $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ হইবে। ]

## উদাহরণমালা 5

**উদা. 1.** Find on which side of the straight line $x-2y-5=0$ lies the point $P(-3, -5)$.

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $x-2y-5=0$ এর ধ্রুবক পদটিকে ধনাত্মক করিয়া লিখিয়া পাই, $-x+2y+5=0$. এখন রাশিটিতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া পাই, $-(-3)+2(-5)+5=3-10+5=-2$ অর্থাৎ ঋণাত্মক।

$\therefore$ P বিন্দুটি সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

[ **দ্রষ্টব্য :** সমীকরণটির ধ্রুবক পদটি ধনাত্মক করিয়া লইয়া মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) বসাইলে রাশিটির মান সতত ধনাত্মক হইবে। সুতরাং

ঐ রাশিতে প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া রাশিটির মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইলে বিন্দুটি সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা একেবারেই বোঝা যায়। ]

**উদা.** 2. Find whether the points A $(1, 1)$ and B $(5, -3)$ lie on the same side or on opposite sides of the line $3x+4y-5=0$.

প্রদত্ত সমীকরণের রাশি $3x+4y-5$ এ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 1)$ বসাইয়া পাই, $3\times1+4\times1-5=7-5=+2$ ধনাত্মক।

আবার, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5, -5)$ বসাইয়া পাই, $3\times5+4(-3)-5=15-12-5=-2$ ঋণাত্মক। অতএব, প্রদত্ত সরলরেখার এক পার্শ্বে A বিন্দু ও অন্য পার্শ্বে B বিন্দু অবস্থিত।

**উদা.** 3. Find the length of the perpendicular from the point (3, 1) on the line $5x-12y+1=0$.

এক্ষেত্রে, লম্বটির দৈর্ঘ্য $=\dfrac{5\times3-12\times1+1}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{13^2}}=\dfrac{4}{13}$.

[ **দ্রষ্টব্য** : এইভাবে লম্বের দৈর্ঘ্য বাহির করিবার সময় উহা কখন কখনও ঋণাত্মক হইবে, তখন উহার ঋণাত্মক মানটিকেই দৈর্ঘ্য ধরিবে। অনুচ্ছেদ 30 (iv) দেখ। ]

**উদা.** 4. Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $12x-5y+4=0$ and $3x-4y-2=0$.

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবক পদ দুইটিকে ( 4 ও $-2$কে ) ধনাত্মক করিয়া লিখিয়া পাই $12x-5y+4=0$ এবং $-3x+4y+2=0$.

ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে

$$\frac{12x-5y+4}{\sqrt{12^2+5^2}}=+\frac{-3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}},$$

$$\text{বা,}\quad \frac{(12x-5y+4)}{13}=\frac{(-3x+4y+2)}{5},$$

বা, $60x-25y+20=-39x+52y+26,$

বা, $99x-77y-6=0.$

আবার, অপর সমদ্বিখণ্ডকটির অর্থাৎ পূর্বের কোণটির পরিপূরক কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{12x-5y+4}{\sqrt{12^2+5^2}}=-\frac{-3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}},$$

বা, $60x-25y+20=39x-52y-26,$ বা, $21x+27y+46=0.$

উদা. 5. Find the foot of the perpendicular from the point $(2, -2)$ to the line $3x-y+2=0$.

এখানে, প্রদত্ত সমীকরণ $3x-y+2=0,$ বা, $y=3x+2.$

$\therefore$ ইহার gradient $m_1=3.$

অতএব $y=3x+2$ রেখার উপর যে কোন লম্বরেখার gradient $m_2=-\frac{1}{3}$ হইবে।

$\therefore$ $(2, -2)$ বিন্দু হইতে $y=3x+2$ সরলরেখার উপর লম্বের সমীকরণ হইবে $y-(-2)=-\frac{1}{3}(x-2),$ বা, $3y+x+4=0.$

ঐ লম্বের পাদবিন্দুটি $3x-y+2=0$ এবং $3y+x+4=0$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু, সুতরাং পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

ঐ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই, $x=-1,\ y=-1.$

$\therefore$ পাদবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(-1, -1).$

উদা. 6. Find the distance between the parallel lines $4x+3y=8$ and $4x+3y+12=0$.

যেহেতু সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কিত করিলে উহা উভয় সরলরেখার উপর লম্ব হইবে।

সরলরেখা $4x+3y=8,$ বা, $4x+3y-8=0$....(1) এর উপর মূলবিন্দু $(0, 0)$ হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{-8}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\dfrac{8}{5}.$

দ্বিতীয় রেখা $4x+3y+12=0 \cdots(2)$ এর উপর মূলবিন্দু $(0, 0)$ হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{12}{5}$.

যেহেতু, সরলরেখা দুইটির উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বিপরীত চিহ্নযুক্ত, সুতরাং বুঝিতে হইবে যে সরলরেখা দুইটি মূলবিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব, উভয় সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব ( অর্থাৎ লম্ব-দূরত্ব ) $= \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = 4$.

**অন্য নিয়ম।** দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব বলিলে উহাদের যে কোন একটির উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে অপর সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব বুঝায়।

প্রদত্ত প্রথম সমীকরণে $y=0$ ধরিলে $x=2$ পাওয়া যায়। সুতরাং প্রথম সরলরেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু $(2, 0)$।

এক্ষণে, $(2, 0)$ বিন্দু হইতে $4x+3y+12=0$ সরলরেখার

$$\text{লম্ব-দূরত্ব} = \frac{4x+3y+12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4\times 2+3\times 0+12}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

অতএব, প্রদত্ত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $=4$.

**উদা. 7.** Find the equation to the straight line passing through the origin and the point of intersection of the lines $x-y=4$ and $y+7x+20=0$, and prove that it bisects the angle between them. [U. P. B. 1951]

$x-y=4 \cdots\cdots\cdots(1)$ ও $y+7x+20=0 \cdots\cdots\cdots(2)$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$$x-y-4+k(y+7x+20)=0 \cdots(3)$$

$\because$ এই (3)-সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া গিয়াছে, $\therefore$ ইহার ধ্রুবক পদটি $=0$ হইবে, অর্থাৎ $20k-4=0$, বা, $k=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $x-y-4+\frac{1}{5}(y+7x+20)=0$,

বা, $y=3x \cdots(4)$.

যেহেতু, (4)-সরলরেখা মূলবিন্দুগামী, সুতরাং উহা (1) ও (2) সরলরেখা-দ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইতে হইলে উহা (1) ও (2) এর অন্তর্ভূত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

$\therefore$ সমীকরণ (1) ও (2) এর ধ্রুবক পদ দুইটিকে (২য়টি ধনাত্মক আছেই) সাজাইয়া সমীকরণ দুইটি হয় $y-x+4=0$ এবং $y+7x+20=0$.

অতএব, উহাদের অন্তর্ভূত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে তাহার সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ হয়, $\frac{y-x+4}{\sqrt{2}}=+\frac{y+7x+20}{\sqrt{1^2+7^2}}$

বা, $\frac{y-x+4}{\sqrt{2}}=\frac{y+7x+20}{5\sqrt{2}}$,

বা, $5y-5x+20=y+7x+20$,

বা, $4y=12x$, বা, $y=3x$.

অতএব প্রমাণিত হইল যে মূলবিন্দু ও প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে তাহা ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

**উদা. 8.** If the three lines $x+y=0$, $x-3y=0$ and $x-2y=1$ form a triangle, find the equation of the perpendicular let fall on $x+y=0$ from the opposite vertex.

এখানে, $x+y=0\cdots(1)$ সরলরেখার বিপরীত শীর্ষবিন্দু অপর দুইটি প্রদত্ত সমীকরণের ছেদবিন্দু। ঐ ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$x-3y+k(x-2y-1)=0,$$

বা, $(k+1)x-(2k+3)y-k=0\cdots(2)$

(1) ও (2) পরস্পর লম্ব হইবে যদি $(k+1)\times 1-(2k+3)\times 1=0$ হয়

[ অনুচ্ছেদ 24 (B) দেখ ]

অর্থাৎ $k=-2$ হয়।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-3y-2(x-2y-1)=0$,

বা, $y-x+2=0$.

উদা. 9. Find the orthocentre of the triangle whose vertices are (1, 5), (7, 2) and (4, 9).

মনে কর, ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক A (1, 5), B (7, 2) এবং C (4, 9). A বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-5=m(x-1)\cdots(1)$.

$$\text{BC বাহুর gradient}=\frac{9-2}{4-7}=-\frac{7}{3}.$$

$\therefore$ (1)-রেখা BC বাহুর উপর লম্ব হইবে যখন $m=\frac{3}{7}$ হইবে।

অতএব, A শীর্ষবিন্দুগামী বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইল

$$y-5=\tfrac{3}{7}(x-1),\quad \text{বা}\quad 3x-7y+32=0\cdots(2).$$

আবার, B বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-2=m(x-7)$.

$$\text{AC বাহুর gradient}=\frac{9-5}{4-1}=\frac{4}{3}.$$

$\therefore$ B শীর্ষবিন্দুগামী AC বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-2=-\tfrac{3}{4}(x-7),\ \text{বা},\ 3x+4y-29=0\cdots(3).$$

এখন, (2) ও (3) এই দুই লম্বের ছেদবিন্দুই হইবে $\triangle$ABC-র লম্ববিন্দু।

$\therefore$ (2) ও (3) সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{25}{11}$, $y=\frac{61}{11}$.

অতএব, লম্ববিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(\frac{25}{11}, \frac{61}{11})$.

উদা. 10. Prove that in any triangle perpendiculars drawn from the vertices upon the opposite sides are concurrent.

মনে কর, ত্রিভুজ ABC-র শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$.

$$\text{BC বাহুর gradient}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}.$$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু A হইতে BC বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1),$$

বা, $y(y_3-y_2)+x(x_3-x_2)-\{y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)\}=0.\cdots(1)$

অনুরূপে, B ও C বিন্দু হইতে CA ও AB বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে, যথাক্রমে

$$y(y_1-y_3)+x(x_1-x_3)-\{y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)\}=0\cdots(2)$$

এবং $y(y_2-y_1)+x(x_2-x_1)-\{y_3(y_2-y_1)+x_3(x_2-x_1)\}=0\cdots(3)$

এখন দেখা যাইতেছে (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়, সুতরাং (1), (2) ও (3) সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

[ অনুচ্ছেদ 28 (B) দেখ। এখানে $p=q=r=1$ ]

অতএব ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

**উদা. 11.** Find the internal bisectors of the angles of the triangle whose sides are $x=0$, $y=0$ and $3x+4y-12=0$.

[C. U.]

স্পষ্টতঃই $x=0\cdots(1)$ $y$-অক্ষের ও $y=0\cdots(2)$ $x$-অক্ষের সমীকরণ, এবং $3x+4y-12=0\cdots(3)$ $x$ ও $y$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়া গিয়াছে। ∴ অক্ষদ্বয় ত্রিভুজটির দুইটি বাহু, উহাদের ১ম ও ৩য় পাদের সমকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া যে রেখা যাইবে তাহাই ত্রিভুজটির একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে। অতএব বুঝা গেল ঐ সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দুগামী বলিয়া ধ্রুবক পদটি শূন্য হইবে এবং $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত থাকিবে বলিয়া $m=1$.

∴ ঐ সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=x$.

আবার, (1) ও (2) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $x=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5x=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $2x+y-3=0$.

এক্ষণে, (2) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5y=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $x+3y-4=0$.

অতএব নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ হইল

$$y=x,\ 2x+y-3=0 \text{ এবং } x+3y-4=0.$$

**Exercise 5**

1. (*a*) Find on which side of the straight line $3x+4y+5=0$ lies the point $(2, -2)$.

(*b*) Find on which side of the straight line $5x-9y+7=0$ lies the point $(0, 3)$.

2. (*a*) Find whether the points A$(0, -4)$ and B$(-3, 1)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $6x+7y+12=0$.

(*b*) Find whether the points P $(3, 1)$ and Q $(-4, -1)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $3x-4y+7=0$.

3. (*a*) Find the distance of the point $(-3, 4)$ from the line $2x-3y+1=0$.

(*b*) Find the distance of the point $(1, 0)$ from the straight line $5x+12y-8=0$.

4. Find the lengths of the altitudes of the triangle having the vertices $(-2, 1)$, $(1, 4)$ and $(3, -1)$.

5. Show that the point $(1, 1)$ is equidistant from the lines $3x+4y=12$, $5x-12y+20=0$ and $4x-3y=6$.

6. If the sum of the perpendiculars dropped from a variable point P on the two str. lines $x+y-5=0$ and $3x-2y+7=0$ be always equal to 10, prove that P must move on a right line. [C. U. 1950]

7. In $\triangle$ABC, $2x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ and $3x+4y+3=0$ represent the sides BC, CA and AB respectively. Find the equation of the altitude through A.

8. Find the orthocentre of the triangle whose sides are given by $x-y+1=0$, $3x+y-17=0$, $x+5y+13=0$.

9. Find the foot of the perpendicular from the point $(3, -2)$ to the straight line $2x-y+7=0$.

**10.** Find the equations to the straight lines bisecting the angles between the following pairs of straight lines :—

(a) $8x-6y+11=0$ and $12x-5y-6=0$

(b) $4y+3x-12=0$ and $3y+4x-24=0$

(c) $x \cos\theta+y \sin\theta=p_1$ and $x \cos\phi+y \sin\phi=p_2$.

**11.** Find the distance between the parallel lines

(a) $3x+4y=6$ and $3x+4y+5=0$

(b) $y=mx+c_1$ and $y=mx+c_2$.

**12.** What are the points on the axis of $x$ whose perpendicular distance from the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ is $a$ ?

[ C. U. 1951]

**13.** Find the equations of the two str. lines drawn through the point $(0, a)$, on which the perpendiculars let fall from the point $(2a, 2a)$ are each of length $a$.

[C. U. 1953]

**14.** Express the condition that the perpendicular dropped from the point $(3, -2)$ on the line $lx+my+n=0$ may be of constant length 5. [C. U. 1956]

**15.** Show that the perpendiculars let fall from any point of the str. line $7x-9y+10=0$ upon the two str. lines $3x+4y=5$ and $12x+5y=7$ are equal to each other.

[C. U. 1952]

**16.** Find the equation of the str. line which lies midway between the points $(2, -1)$ and the str. line $3x-2y+5=0$.

[J. B. A.]

# উত্তরমালা

## MENSURATION

### Exercise 1

1. 52 ব. ফু., 24 ঘ. ফু. $\sqrt{29}$ ফু. 2. 150 ব. ফু., 125 ঘ. ফু., 5 $\sqrt{3}$ ফু.
3. 54 ব. ফু., 27 ঘ. ফু. 4. 2·5 ফু. 5. 236 ব. ফু.
6. 5196·15 ঘ. ই. (প্রায়) 7. 15 ই., 9 ই., 6 ই.
8. 13 ই. 9. 11 ফু. 10. 12288 11. 6 টা. 13 আ. 9 পা
12. 9 ঘ. ফু. ; 3182 ঘ. ই. 13. 25 ফু. 14. 10·392 ই.
15. $\frac{16}{21}$ আ., $1\frac{7}{9}$ আউন্স 17. $314\frac{1}{2}$ ঘ. ফু. 18. 91 ঘ. গ. 7 ঘ. ফু.

### Exercise 2

1. 3 ব. ফু. 2. 432 ঘ. সে. মি. 4. $13\frac{1}{3}$ ফু., 172 ব. ফু.
5. 10 ফু. 6. 935·3 ঘ. ফু. 7. 880 ঘ. ফু. 8. 370·764 ঘ. ফু.
9. 6363·96 ঘ. ফু. 10. 1 ব. ফু. 11. 600 ঘ. ফু.
12. 180 $\sqrt{3}$ ঘ. ফু. 14. 240 ঘন সে. মি. 15. 80 ব. ফু., 64 ঘ. ফু.
16 360 ঘন সে. মি., 432 বর্গ সে. মি. 17. 5 টাকা
18. 4 সে. মি., 144 ঘন সে. মি. 19. 8 সে. মি., 1152 ঘন সে. মি.।

### Exercise 3

1. (1) 13 ই. (2) $204\frac{2}{7}$ ব. ই. (3) $282\frac{6}{7}$ ব. ই. (4) $314\frac{2}{7}$ ঘ. ই.
2. 30 ই., 29·79 ই. (প্রায়) 3. $204\frac{2}{7}$ ব. সে. মি., $314\frac{2}{7}$ ঘ. সে. মি.
4. 7 ফু. 5. 1 ফু. 6. $427\frac{3}{7}$ বর্গ সে. মি., $1005\frac{5}{7}$ ঘন সে. মি.
7. 236·28 ব. ফু. (প্রায়) 8. $37\frac{5}{7}$ ঘ. ই. 9. 1930·971 ঘ. ই.
10. $116\frac{27}{154}$ ঘ. ফু. 11. $427\frac{3}{7}$ ব. ফু., $1005\frac{5}{7}$ ঘন ফু.
12. $37\frac{5}{7}$ ঘ. ফু., $47\frac{1}{7}$ ব. ফু.।

# ALGEBRA

## Exercise 1

1. $a-3b=0$ 2. $mn=10$ 3. $ab'-a'b=0$
4. $a^6-a^3=1$ 5. $(ab+d)^2=(a^2-b+c)(b^2-bc+ad)$
6. $ab=1$ 7. $c^2-bc+ab^2=0$ 8. $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=4$. 9. $ab=6$
10. $a^2+2c-b=0$ 11. $(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2$
12. $p^3-3pq+2r=0$ 13. $m^3-3lm-n=0$
14. $a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0$
15. $a(b_1c_2-b_2c_1)+b(c_1a_2-c_2a_1)+c(a_1b_2-a_2b_1)=0$
16. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ 17. $b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4=a^2b^2c^2d^2$
18. $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ 19. $x^2+y^2=a^2$.

## Exercise 2

1. 34 2. 1 3. 3 4. $a, a+d, a+2d, \cdots$
5. $5, 2, -1, -4, \cdots$ 6. $-26$ 7. $35, 3r-1$
8. $-30, 10-2n$ 9. $3\frac{1}{4}$ 10. (i) $a-\frac{1}{n}+1$, (ii) $\frac{n^2-n+1}{n}$
11. 9th 12. 6th, 11th 13. না 14. 16th
15. 38 16. $-49$ 17. 9, 0 18. $2, 5, 8, \cdots$
19. $\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}, \frac{c-d}{p-q}$ 20. 0 21. $\frac{r(a-b)-(aq-bp)}{p-q}$.

## Exercise 3

1. 15 2. 4 3. $-9$ 4. $x^2+a^2$ 5. $2\frac{7}{8}$
6. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ 7. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36
8. 68, 132, 196, 260 9. 6 10. 7.

## Exercise 4

**1.** 100 **2.** $\frac{n}{2}(3n+7)$ **3.** $-96$ **4.** 290 **5.** $61\frac{3}{4}$

**6.** $\frac{n+1}{2}$ **7.** 378 **8.** $(n-1)(2n-3)$ **9.** $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

**10.** $19(\sqrt{2}+18)$ **11.** 3927 **12.** $-144$ **13.** 900

**14.** 19096 **15.** 4080 **16.** $n(2n+1)$ **17.** 247

**18.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **19.** 6867 **20.** 7500 **21.** 2940

**22.** 861 **23.** $-368$ **24.** 1763 **25.** 11

**26.** 19 **27.** 551 **28.** 1, 2 **29.** 5. 9, 13,$\cdots$

**30.** 3, 10 ; অথবা, $-1$, 12 **31.** $(2r-1)^2$ **32.** 2747

**35.** 5, 12, 19, বা 19, 12, 5 **36.** 1, 4, 7, 10, বা 10, 7, 4, 1

**37.** $\frac{n}{2}(a+c)$ **39.** $n^2$ **40.** $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

**41.** $\frac{n}{2}(4n^2+17n+21)$ **42.** $\frac{n}{2}(6n^2+21n+23)$

**43.** $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$ **44.** $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$

**45.** $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ **46.** $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

**47.** $\frac{1}{4}n(n+5)(n^2+5n+10)$ **48.** $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

**49.** $\frac{n}{4(n+1)}$ **50.** $\frac{n}{3(n+3)}$ **51.** $\frac{1}{3}(4n^3+18n^2-n)$

**52.** (*a*). $\frac{-r(r+1)}{2}$ ( যদি $r$ যুগ্ম হয় ), $\frac{r(r+1)}{2}$ ।( যদি $r$ বিজোড় হয় )

**55.** $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$, অথবা $8\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$ **58.** 25 **59.** 9, 16

**60.** 50500 গজ **61.** 9 দিন

**62.** 36 বৎসর পরে $18\frac{1}{2}$ গজ **63.** 10 মা.।

## Exercise 5

1. 128 2. 6561 3. $\frac{1024}{3125}$ 4. $\frac{1}{3^{n-1}}$ 5. $\frac{1}{2^{n-5}}$

6. $3.(-3)^{p-1}$ 7. $\frac{1}{81}$ 8. $\frac{1}{32}$ 9. 1, 2, 4, 8,⋯

10. $\pm\frac{1}{256}$ 11. $\frac{1}{6561}$ 12. 3, 2 13. 9ম পদ

14. 7ম পদ 15. 512, $2^{n-1}$ 16. $\left(\frac{a^{n-q}}{b^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

## Exercise 6

1. ±25 2. $\pm\frac{1}{4}$ 3. ±9 4. ±4 5. $\pm x^2y^2$ ; ±9

6. 12, 36, 108, অথবা −12, 36, −108 7. 15, 45

8. 225, 2025, 18225, অথবা −225, 2025, −18225

9. $\frac{1}{3}$, 1, 3 অথবা $-\frac{1}{3}$, 1, −3 10. $\frac{27}{8}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, $\frac{32}{243}$, অথবা $-\frac{27}{8}$, $\frac{9}{4}$, $-\frac{3}{2}$, 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, $-\frac{32}{243}$

16. 32, 18 অথবা 18, 32.

## Exercise 7

1. 255 2. $255\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}(3^n-1)$ 4. $\frac{1}{4}(1-3^{2n})$

5. $3\frac{63}{64}$ 6. $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 7. $\frac{19682}{3-\sqrt{3}}$ 8. $1\frac{511}{512}$

9. $\frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ 10. $\frac{1}{6}-\frac{2}{3.10^n}$ 11. −255 12. $1\frac{255}{256}$

13. $7\frac{127}{128}$ 14. $2^{n+1}-2$ 15. $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

16. 1530 17. 1092 18. $\frac{5}{2}(2^{25}-1)$

19. 25500 20. 1, 4, 16.

## Exercise 8

3. $\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ 4. $\frac{20}{81}(10^n-1)-\frac{2n}{9}$

5. $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ 6. $n.2^n$ 7. $2^{n+1}-n-2$

8. $\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}$ 10. $2^{n+1}-2+n(n+1)$

11. 3, 6, 12 অথবা 12, 6, 3 12. $\frac{3^{n+1}-3-2n}{4.3^{n-1}}$

13. 2, 5, 8 অথবা 26, 5, −16 15. $\frac{y^2-xz}{x+z-2y}$

19. 4, 8, 16 অথবা 16, 8, 4.

## Exercise 9

1. $\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{5}a^3$. 2. 25, ±15, $y=\frac{900}{x^2}$ 3. 2

5. $R=k+k^1v^2$. 6. (i) $\sqrt[3]{a}$, (iii) $t^2$.

8. $x=\frac{3}{10}.\frac{y}{z}$; 9. 10. $b=2a+\frac{3}{a}$; 7. 11. 10 বা 8

12. 16 : 49 13. $38\frac{1}{2}$ ব. ফু. 14. ±6 15. $\frac{27}{5}$ দিন

16. $20\frac{1}{4}$ ফু. 17. $x\propto\frac{b^4}{a}$. 19. 256 ফু.

20. 20*m*. per hr. 21. $d=4$. 22. 64 : 45 24. 325 টাকা

25. 80 ফু. 26. (i) P=22, (ii) W=68.

## Exercise 10

1. 1·9445, $\bar{1}$·0913, $\bar{3}$·5127 2. 23·01, ·05671, ·06689

3. 6, 10 4. সপ্তম 5. 1·644, 1·524 ; ·7656 6. (i) 1·248 (ii) 15·7 (iii) ·01795 7. 1·6532126 8. ·30103

**9.** 70 পা. **10.** 847 টা. 14 আ. 8 পা. (প্রকৃত উত্তর 847 টা. 4 আ. 8 পা. )। **11.** 275 **12.** 125·2 একর

13 478 টা. (আসন্ন) **14.** 6616 (প্রকৃত উত্তর 6615 )

**15.** 22 গজ **16.** 4 **19.** 1·196 ব. গ. **22.** (i) $x=1{\cdot}593$ (ii) $x={\cdot}03$ (প্রায়) **23.** 6 **26.** $\log x=\frac{1}{5}(a+3b)$, $\log y=\frac{1}{5}(a-2b)$ **27.** 3 **29.** 1·77 ( প্রায় )

**30.** $x={\cdot}40703$ ; $y=5{\cdot}6568$ (প্রায়) **31.** 1·206.

## Exercise 11

[ কেবল ধনাত্মক বর্গমূলগুলি দেওয়া হইল। তোমরা দুইটিই দিবে। যথা, প্রথমটি লিখিবে $\pm(4\sqrt{2}+3)$. ]

**1.** (*a*) $4\sqrt{2}+3$ (*b*) $3\sqrt{3}-1$ (*c*) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

(*d*) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (*e*) $\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ (*f*) $3+\frac{\sqrt{7}}{2}$

**2.** (*a*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-2})$

(*b*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1})$

(*c*) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (*d*) $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$

(*e*) $\sqrt{(x-y)}+\sqrt{z}$

**3.** (*a*) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$

(*b*) $9\sqrt{3}-9.\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}-2.\sqrt[3]{4}$, (*c*) $\sqrt[3]{2}-1$

(*d*) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{x}+\sqrt{y})$

**4.** (*a*) $3+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$ (*b*) $\frac{25-18\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}}{29}$

(*c*) $\frac{3+\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{6}$ (*d*) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$

**5.** $\frac{35}{33}$ **7.** 5·99 **8.** 2 **10.** 3·66.

## Exercise 12

1. $-(18+11\sqrt{6})$ 2. $-(142-22\sqrt{35})$.

3. $-(24\sqrt{2}+20\sqrt{42}-6\sqrt{6}-15\sqrt{14})$ 4. $\frac{3-\sqrt{-5}}{14}$

5. $\frac{1}{7}(6+2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}-\sqrt{15})$ 6. $-\frac{31}{17}i$ 7. $\frac{4xyi}{x^2+y^2}$

8. $\frac{-6abi}{a^2+4b^2}$ 9. $0+i$ 10. $\frac{13}{10}+i\frac{9}{10}$

11. $\frac{18}{13}+i.\frac{1}{13}$ 12. $\frac{7}{5}+i\frac{\sqrt{6}}{5}$ 13. $5+i5$ 14. $65+i.0$

15. $\pm(3+\sqrt{-5})$ 16. $\pm(5-3\sqrt{-2})$ 17. $\pm(5-6\sqrt{-1})$

18. $\pm(3i-4)$ 19. $\pm(3-4i)$ 20. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

21. $\pm(3+5i)$ 22. $\pm\frac{1}{2}(3+\sqrt{-11})$ 23. $\pm(5+2i)$

24. $\pm(2x+iy)$ 25. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+3a+1}+i\sqrt{a^2-3a+1})$

26. $\pm\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)-2i\right\}$ 27. $3\sqrt{2}$ 33. 2 34. $\frac{6}{13}$

35. 5 36. 13 37. 65 38. $\frac{25}{13}$ 39. $\sqrt{\frac{5}{13}}$

40. $(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

41. $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ 42. $(x+i)(x-i)$

43. $(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$ 45. $\pm1$ and $\pm i$ 50. 3

51. $(a+b+c-abc)^2+(1-ab-ac-bc)^2$ 52. 10.

## Exercise 13

1. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}\right\}$

3. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=6\end{matrix}\right\}$ 4. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{3}\end{matrix}\right\}$

5. $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$

6. $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{7}{2} \\ y=-\frac{9}{2} \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}+\sqrt{2} \\ y=\frac{3}{2}-\sqrt{2} \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}-\sqrt{2} \\ y=\frac{3}{2}+\sqrt{2} \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{5}(1+2\sqrt{5a-1}) \\ y=\frac{1}{5}(2-\sqrt{5a-1}) \end{array}\right\}$ বা $\begin{array}{l} x=\frac{1}{5}(1-2\sqrt{5a-1}) \\ y=\frac{1}{5}(2+\sqrt{5a-1}) \end{array}$

9. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=9 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=1 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{5} \\ y=5 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=\frac{4}{5} \\ y=20 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=7 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=\frac{11}{9} \\ y=-\frac{13}{3} \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=4 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=5 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=-5 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=-4 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{20}{13} \\ y=\frac{37}{13} \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\pm 2 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right\}$

19. $x=\dfrac{1\pm 2\sqrt{5b-1}}{5},\ y=\dfrac{2\pm\sqrt{5b-1}}{5}$

20. $\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=4 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=8 \end{array}\right\}$

21. $x=7,\ y=5$ ; বা $x=-5,\ y=-7$

22. $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=7 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=-5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=-7 \end{array}\right\}$

23. $x=9, y=4$, বা $x=4,\ y=9$

24. $x=2,\ y=5$, বা $x=-2,\ y=-5$

25. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=10 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=15 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x=2a-b \\ y=2b-a \end{array}\right\}$

29. $x=\frac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$, $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$

30. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=6\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=6\\y=3\end{matrix}\right\}$ 31. $\left.\begin{matrix}x=9\\y=4\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=4\\y=9\end{matrix}\right\}$

32. $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=2a\\y=2b\end{matrix}\right\}$ 33. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=-12\\y=-\frac{28}{3}\end{matrix}\right\}$.

# TRIGONOMETRY

## Exercise 1

1. $60°, \frac{1}{2}$ 2. $45°, 1$ 3. $30°, \frac{2}{\sqrt{3}}$ 4. $1$ 5. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. $\sqrt{3}$ 7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8. $-1$ 9. $-\sqrt{2}$ 10. $-2$

11. $-\sqrt{3}$ 12. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 13. $0$ 14. $1$ 19. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. $\pm\frac{15}{17}$ 21. $0$ 22. $-\tan 38°$ 23. $-\cos 30°$

24. $-\sin\frac{\pi}{9}$ 25. $120°, 300°, -60°, -240°$ 26. $60°, 120°$

27. $30°, 150°$ 28. $30°, 330°$ 29. $60°, 300°$ 30. $30°, 150°$

31. $45°, 135°, 225°, 315°$ 32. (i) $\pm\frac{1}{2}$ (ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\pm 1$

33. (i) $240°$ (ii) $330°$ (iii) $405°$ 34. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

35. $-10$ 36. (i) $\sin\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, (ii) $3$ 38. $-1$.

## Exercise 2

1. (i) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2+\sqrt{3}$ (iii) $-(2+\sqrt{3})$

2. $\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$
$+\sin A\sin B\sin C$.

3. $\sqrt{2}$ 4. $\frac{33}{65}$ 5. $-\frac{85}{36}$ 6. $-\frac{278}{29}$ 27. $0$ 28. $1$.

## Exercise 3

1. $\sin 7\theta + \sin 3\theta$  2. $\sin 15\theta + \sin \theta$  3. $\frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos \theta)$

4. $\cos(2A - B) - \cos(4A + B)$  5. $\sqrt{3} \cos 20°$

6. $-2 \cos 5\theta \sin 2\theta$  7. $2 \cos 5A \cos 2A$

8. $2 \sin 8\theta \sin \theta$  9. 0  10. $\frac{1}{2}$  11. $\frac{1}{8}$  12. $\frac{3}{8}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$  29. $4 \sin(B + C) \sin(C + A) \sin(A + B)$

30. $\sin(A + B + C) + \sin(A - B - C) + \sin(A + B - C)$
$+ \sin(A - B + C)$

32. $4 \sin A \sin B \sin C$  34. $\frac{3}{4}$  35. $\tan 4A$

36. $\pm\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{4 - a^2 - b^2}}$.

## Exercise 4

1. $\frac{3}{4}$  2. $-\frac{23}{27}$  3. $\frac{1}{7}$

4. (i) 2 ; (ii) $\dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$, $\dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$  25. $\frac{3}{2}$.

## Exercise 5

1. $\frac{1}{4}\{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}\}$, $\frac{1}{4}\{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}\}$

3. $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{8}$  4. $\frac{3}{4}$  5. $\frac{1}{2}$  8. $\frac{16}{305}$, $\frac{49}{305}$  10. $\frac{1}{16}$

11. $\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$, $\pm\sqrt{\left(\dfrac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)}$

12. $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\{-\sqrt{1 + \sin A} - \sqrt{1 - \sin A}\}$,

$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\{-\sqrt{1 + \sin A} + \sqrt{1 - \sin A}\}$

21. No, $2 \sin \frac{\theta}{2} = -\sqrt{1 + \sin \theta} + \sqrt{1 - \sin \theta}$

24. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$  25. $2 \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{1 + \sin A} + \sqrt{1 - \sin A}$.

# CO-ORDINATE GEOMETRY

## Exercise 1

1. (i) 13 (ii) 5 (iii) $4\sqrt{13}$ (iv) 10 (v) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$
2. (a) $\sqrt{10}$ (b) 25 (c) 13 (d) 10
(e) $\sqrt{m^2+n^2}$ (f) $2\sqrt{b^2+d^2}$ (g) $(\cos\theta-\sin\theta)\sqrt{2}$
(h) $2\sqrt{a^2+b^2}$ 3. (i) $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ (ii) $(2, -1)$ (iii) $(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2})$
4. (a) $(\frac{12}{7}, \frac{2}{7})$ (b) $(0, -\frac{11}{5})$ (c) $(-11, 16)$ (d) $(9, 8)$
5. $(3, 2\frac{2}{3})$ 6. (ii) 4 : 5 (ii) 3 : 2 (externally) 7. 5 বা −1
8. 9 বা −3 9. 7 বা 17 21. $(\frac{3}{2}, 5)$ 22. (3, 4) 23. $3x+y=4$
24. (i) 11, (ii) $8\frac{1}{2}$, (iii) $22\frac{1}{2}$, (iv) −3, (v) $\frac{1}{2}\sin\theta$
(vi) 0 25. $\sqrt{41}, (-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ 26. (1, 3) 27. (3, 4)
28. $3\sqrt{2}$, 3, 3 29. 3 30. −6
32. (i) 5·5 (ii) 9 (iii) 10 (iv) 17 [ প্রত্যেকটি বর্গ একক। ]
33. (3, 4) ; 5 39. $1\frac{3}{8}$.

## Exercise 2

1. $2x-y=4$. 2. $6x+8y=25$. 3. $2x-3=0$.
4. $2y-3x=4$. 5. $3x^2+4y^2-16y-16x+32=0$.
6. $y^2=2x-1$. 7. $x^2+y^2-10x-24y=0$.
8. $x^2+y^2=k^2-a^2$ 9. $2x-y+8=0$.
10. $x+y=k$. 11. $\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}=1$.

## Exercise 3

1. (i) 3 (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{a}{b}$ (iv) −3 (v) 0.
2. (i) $-\frac{3}{2}$, (3, 0) (ii) 3, (−2, 0) (iii) −1 ; (0, 0)
(iv) 2, $(-\frac{5}{2}, 0)$ (v) $-\cot\theta, (-r\sin\theta, 0)$.

3. (i) $90°, (0, 0)$ (ii) $45°, (0, 1)$ (iii) $135°, (0, -5)$
(iv) $60°, (0, 2)$ (v) $\tan^{-1}\frac{3}{4}, (0, \frac{1}{4})$

4. (i) $-3$ and $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$
(iii) $-r \operatorname{cosec}\theta$ and $r \sec\theta$.

5. (i) $2x+3y=6$ (ii) $4x+5y+20=0$ (iii) $3x-5y=9$
(iv) $5x-9y+13=0$ (v) $bx+ay=a$.
(vi) $b^2x\cos\alpha+a^2y\sec\alpha=ab$.

6. (i) $9x+8y=29$ (ii) $bx-ay+ab=0$
(iii) $\frac{x}{c}\cos\frac{C+D}{2}+\frac{y}{d}\sin\frac{C+D}{2}=\cos\frac{C-D}{2}$
(iv) $2x-(p_1+p_2)y+2\alpha p_1p_2=0$.
(v) $\frac{x}{h}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{y}{k}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.
(vi) $3x+y=5$.

7. (i) $6x+11y-9=0, 11x+2y-71=0$ and $5x-9y+47=0$.
(ii) $x+y=3, 12x-5y=70$ and $5x-12y+70=0$.
(iii) $2x+5y=0, 11x-y-57=0$ and $3x-2y=0$.

8. (i) $x\cos 30°+y\sin 30°=4$
(ii) $x\cos 135°+y\sin 135°=7$
(iii) $x\cos 225°+y\sin 225°=2\sqrt{2}$.
(iv) $-\frac{6}{\sqrt{205}}x+\frac{13}{\sqrt{205}}y=\frac{19}{\sqrt{205}}$.

9. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (iv) $\frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}}$

10. (a) $y=\sqrt{3}x+1$. (b) $x\sqrt{3}+y=10$
(c) $x+y+2=0$ (d) $x-y+1=0$
(e) $x-y+1=0, (1, 2)$ (f) $3x-2y+30=0$
(g) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$. (h) $x+y=5$.
(i) $x(c-a)+y(d-b)=c^2+d^2-a^2-b^2$

11. $9x-2y+1=0$ 12. $2x-3y=0$ and $8x-3y=0$

13. $3x+2y-12=0$ or $x+y=5$.

14. $x+10y-28=0$. 16. $x+\sqrt{3}y=\pm 6$.

17. $x-y+1=0$ ; $(1, 2)$. 18. $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$.

19. (a) কোণ $=\tan^{-1}(-\frac{4}{5})$, $y$-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে $\frac{3}{5}$.
(b) $2\sqrt{10}$ (c) $2, \frac{1}{3}$ 20. $3x+11y-15=0$.

21. (i) $x'^2=4y'$ (ii) $2x'^2+3y'^2-12x'+9y'+14=0$.

22. $x'^2+y'^2+4x'+3y'+7=0$. 23. $x'^2+2cx'+y'^2=0$.

## Exercise 4

1. (a) $y=7$ (b) $x+3=0$. 2. (i) $\tan^{-1}\frac{1}{7}$
(ii) $45°$ (iii) $45°$ (iv) $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{2ab}$ (v) $90°$.

3. (i) $(-\frac{11}{29}, \frac{41}{29})$ (ii) $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$ (iii) $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$ ; $9x+9y=40$
(iv) $\left(p\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2}, p\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2}\right)$.

4. (a) $4x-3y+3=0$. (b) $3x+4y-25=0$.
(c) $y-3x+7=0$. (d) $3x+y-5=0$.
(e) $3x+7y=0$. (f) $12x+18y+11=0$.
(g) $x+3y-1=0$. (h) $x+y+2=0$. (i) $x=y$.
(j) $119x+102y-125=0$. (k) $2x+3y+1=0$.

5. (a) $(-2, 1)$ (b) $(13, 7)$ (c) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$
(d) $\left(\frac{d}{a+b+c}, \frac{d}{a+b+c}\right)$ (c) $\left(\frac{15}{17}, \frac{31}{17}\right)$.

6. (a) $-1$ (b) $0$. 10. $3x-y=7$ ; $8\frac{1}{6}$ বর্গ একক।

11. $121y-88x=371$ 13. $\left(\frac{b}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

15. (a) $3x-y=7$ and $x+3y=9$
(b) $x=7$ and $x+\sqrt{3}y=7+9\sqrt{3}$.
(c) $x=0$ and $y+\sqrt{3}x=0$. (d) $y=x\tan\theta$.

16. $x=3$ ; $y=4$ ; $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক ।

17. $9x-7y-1=0$ এবং $7x+9y-73=0$.

18. $7x-y+19=0$ এবং $x-5y+27=0$

19. (a) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$. (b) $\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\pm5$ ; 10 ও $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

20. (a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{7\sqrt{5}}{3}$ 21. $5x-12y+16=0$ ; 13.

22. 24 বর্গ একক । 23. (0, 0), (10, 0), (7, $\sqrt{3}$) এবং (3, $\sqrt{3}$) ; $7\sqrt{3}$ বর্গএকক ।

24. $x(b-b')-y(a-a')=a'b-ab'$ ;
$x(b-b')+y(a-a')=ab-a'b'$.

## Exercise 5

1. (a) মূলবিন্দুর দিকে (b) মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে
2. (a) বিপরীত দিকে (b) বিপরীত দিকে ।
3. (a) $\frac{17\sqrt{13}}{13}$ (b) $\frac{3}{13}$ 4. $\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{21}{\sqrt{29}}, \frac{21}{\sqrt{29}}$.
7. $x-2y+11=0$ 8. (3, 0) 9. (−3, 1).
10. (a) $224x-128y+83=0$ and $16x+28y-203=0$.
 (b) $y-x+12=0$ and $7y+7x-36=0$.
 (c) $x(\cos\theta-\cos\phi)+y(\sin\theta-\sin\phi)=p_1-p_2$,
 and $x(\cos\theta+\cos\phi)+y(\sin\theta+\sin\phi)=p_1+p_2$.
11. $\frac{11}{5}$ (b) $\frac{c_1-c_2}{\sqrt{1+m^2}}$.
12. $\left\{\frac{a}{b}(b\pm\sqrt{a^2+b^2}), 0\right\}$.
13. $y=a$ and $4x-3y+3a=0$.
14. $(3l-2m+n)^2=25(l^2+m^2)$. 16. $6x-4y-3=0$.

# QUESTIONS

## SET IN HIGHER SECONDARY (WEST BENGAL),

### C. U. PRE-UNIVERSITY & B. U. ENTRANCE EXAMINATIONS WITH ANSWERS

**[Pertaining to Syllabus for class X only.]**

---

## HIGHER SECONDARY EXAMINATION—1960

### Elective Mathematics

### FIRST PAPER—GROUP A—Algebra

**2.** Solve the equations :

(*a*) $\left.\begin{array}{r} 2x^2+3xy+y^2=15 \\ 5x+2y=12 \end{array}\right\}$ [Ans. $x=2,\ y=1$ or, $x=14,\ y=-29$]

(*b*) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y=5xy \\ 2y+3z=2yz \\ 5z+2x=6zx \end{array}\right\}$ [Ans. $x=y=z=0$ $x=1,\ y=3,\ z=2$]

**3.** (*a*) A class consists of a number of boys whose ages are in Arithmetical progression, the common difference being 3 months. If the youngest boy is just seven years old and the sum of the ages of the boys is 153 years, find the number of boys in the class.

[Ans. 17]

(*b*) If $S_1$, $S_2$, $S_3$ denote respectively the sum of the first $n$ terms, first $2n$ terms and first $3n$ terms of a series in geometrical progression, prove that $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$.

**4.** (*a*) Find the cube roots of unity. If $\omega$ be an imaginary cube root of unity, prove that $1+\omega+\omega^2=0$.

$\left[\text{Ans. } 1, \dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right]$

(*b*) The area of a circle varies as the square of its radius. If the area is $38\frac{1}{2}$ sq. ft. when the radius is 3 ft. 6 in., find the area when the radius is 4 ft. 8 in. [Ans. $68\frac{4}{9}$ sq. ft.]

7. (*a*) Simplify :

$$\log_{10}\frac{384}{5}+\log_{10}\frac{81}{32}+3\log_{10}\frac{5}{3}+\log_{10}\frac{1}{9}$$ [Ans. 2]

(*b*) If $x$, $y$, $z$ are in geometrical progression, prove that $\log_{10}x$, $\log_{10}y$ and $\log_{10}z$ are in Arithmetical progression.

GROUP B—**Trigonometry**

**10.** (*a*) If $A$, $B$, $A+B$ are all acute angles, prove (geometrically) that $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

(*b*) Find the value of—

$$\sin^2 60^\circ+\cos^2 150^\circ+\tan^2 120^\circ+\cos 180^\circ-\tan 135^\circ.$$

[Ans. $4\frac{1}{2}$]

**11.** (*a*) Find the values of $\theta$ between $0^\circ$ and $360^\circ$ which satisfy the equation $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$. [Ans. $120^\circ$, $240^\circ$]

(*b*) If $A+B=90^\circ$, prove that $\frac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A}=\tan A-\tan B$.

SECOND PAPER (**1960**)

**2.** (*a*) Show that the angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternate segment of the circle.

(*b*) $ABC$ is a triangle inscribed in a circle ; $AD$, $AE$ are lines drawn to the base $BC$ parallel to the tangents at $B$, $C$ respectively; prove that $BD : CE = AB^2 : AC^2$.

*Or*, (*b*) Tangents $AB$, $AC$ are drawn to a circle ; $CE$ is perpendicular to the diameter $BD$ through $B$ ; prove that $AD$ bisects $CE$.

**3.** Draw an equilateral triangle, each side of which is 2 inches. Now proceed to construct a square equal in area to this triangle.

*Or*, Draw circles of radii 4 cms. and 2·5 cms. respectively, with their centres at a distance 10 cms. apart. Proceed to construct a transverse common tangent to the two circles.

[ *Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.* ]

**4.** Answer either (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Obtain the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$ internally in the ratio $m_1 : m_2$.

$$\left[\text{Ans. } \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$$

(*b*) If $A$, $B$, $C$, $D$ are points whose co-ordinates are $(-2, 3)$, $(8, 9)$, $(0, 4)$ and $(3, 0)$ respectively, and $AB$ and $CD$ are joined, find the ratio of the segments into which $AB$ is divided by $CD$.

[Ans. 11 : 47]

(*c*) Obtain the equation of the straight line whose intercepts on the axes $OX$, $OY$ are $a$ and $b$ respectively.

$$\left[\text{Ans. } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\right]$$

(*d*) Determine the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines given by $3x-4y+1=0$ and $5x+y=1$, and has equal intercepts of the same sign on the axes.

[Ans. $x+y=\frac{11}{23}$]

7. (*a*) A thick hollow cylindrical pipe is 6 inches in length, and its whole surface (outer and inner curved surfaces and the plane edges) is 308 sq. inches. If the external diameter of the pipe is 8 inches, and if its material weighs 4 ozs. per cubic inch, find its weight. [Take $\pi=\frac{22}{7}$]. [Ans. 528 ozs.]

(*b*) When is (*i*) a straight line, (*ii*) a plane said to be perpendicular to a given plane ?

If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that it is perpendicular to the plane containing them.

## H. S. Exam. (Compartmental)—1960

### First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $x+2y=4$, $2xy-y^2=3$.

[Ans. $x=2, y=1$ ; $x=\frac{14}{5}, y=\frac{3}{5}$]

(*b*) The distance through which a heavy body falls from rest varies as the square cf the time of its fall. If a body falls 64 feet in two seconds, how far does it fall in 8 seconds ?

[Ans. 255ft.]

3. (*a*) One hundred stones being placed in a straight line on the ground at a distance of one yard from one another, how far will a person travel, who shall bring them, one by one, to a basket, placed in the same straight line at the distance of a yard from the first stone ? [Ans. 5m. 1300 yds.]

(*b*) If $a$ $b$, $c$ be respectively the $p^{th}$, $q^{th}$ and $r^{th}$ terms of a geometric series, prove that $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$.

6. (*a*) Find the logarithms of (*i*) 324 to the base $3\sqrt{2}$. (*ii*) $\frac{1}{9}$ to the base $9\sqrt{3}$. [Ans. (*i*) 4 (*ii*) $-\frac{4}{5}$]

(*b*) Prove that $\log\frac{81}{8}-2\log\frac{3}{2}+3\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}=0$.

### Group B—Trigonometry

9. (*a*) If $A$ and $B$ are both acute angles and $A$ is greater than $B$, prove (geometrically) that

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

(*b*) If $\sin A=\frac{3}{5}$ and $\cos B=\frac{12}{13}$ where $A$ and $B$ are acute angles, find the value of $\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$. [Ans. $\frac{16}{63}$]

10. (*a*) Find the values of $\theta$ between 0° and 360° which satisfy the equation $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$. [Ans. 60° and 300°]

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

## SECOND PAPER (Compl., 1960)

2. (*a*) If two chords of a circle intersect outside the circle, prove that the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(*b*) Prove that if the common chord of two intersecting circles be produced it will bisect their common tangent.

*Or*, $ABC$ is a triangle right-angled at $A$ ; $AD$ is perpendicular to $BC$. Show that $AB^2 = BD.BC$.

3. Draw a circle of radius 2 cms. Construct an equilateral triangle circumscribing this circle.

*Or*, Draw a triangle with sides 3, 4 and 5 cms. Now construct a square equal in area to this triangle.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof*].

4. Answer either (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Find the distance between the points whose co-ordinates are $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

(*b*) Prove that the points whose co-ordinates are $(-2, -2)$, $(2, 2)$ and $(4, -4)$ are the vertices of an isosceles triangle.

(*c*) Find the angle between the straight lines whose equations are $y = m_1x + c_1$ and $y = m_2x + c_2$.

(*d*) Obtain the equation to the straight line passing through the point $(-1, 2)$ and perpendicular to the line $3x + 4y = 5$.

[Ans. $4x - 3y + 10 = 0$]

7. Answer any two of the following questions :—

(*a*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

(*b*) The volume of a right circular cone whose height is 24 inches is 1232 cu. inches. Find the area of its slant surface.

[Ans. 550 sq. in.]

(*c*) $AB$ is a diameter of a circle ; $AC$ and $AD$ are any two chords cutting the tangent at $B$ in $P$ and $Q$ ; prove that $\angle PCQ = \angle PDQ$.

(*d*) A straight line is drawn through the point (3, 5) such that the point bisects the portion of the line intercepted between the axes. Find the equation of the line, and calculate its perpendicular distance from the origin. [Ans. $5x + 3y = 30$ ; $\frac{15}{17}\sqrt{34}$]

## H. S. Examination, 1961

### First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations :

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3 \\ 2x^2-5xy+2y^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left[\begin{aligned} &\text{Ans. } x=1,\ y=2\ ; \\ &\text{or, } x=3,\ y=1 \end{aligned}\right]$$

(*b*) The length of a pendulum varies inversely as the square of the number of beats it makes per minute. If a pendulum 16 ft. long makes 27 beats per minute, find the length of the pendulum that makes 24 beats per minute. [Ans. $20\frac{1}{4}$ ft.]

3. (*a*) A person lends Rs. 1000 to a friend agreeing to charge no interest and also recover the amount by monthly instalments decreasing successively by Rs. 2. In how many months will the loan be paid up, if the first instalment be Rs. 64 and its payment be made one month after the sum is lent ? [Ans. 25]

(*b*) If 1, $\omega$, $\omega^2$ are the three cube roots of unity, prove that

$$(1+\omega-\omega^2)^3=(1-\omega+\omega^2)^3=-8.$$

6. (*a*) Given $\log 2 = \cdot30103$ and $\log 3 = \cdot4771213$, find the logarithm of $\cdot015$. [Ans. $\bar{2}\cdot1760913$]

(*b*) Prove that $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}-\log 2=0$.

### Group B—Trigonometry

9. (*a*) If $A$, $B$ and $A-B$ are positive acute angles, prove geometrically that $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

(*b*) Find the value of $\sin 330^\circ+\tan 45^\circ-4\sin^2 120^\circ+2\cos^2 135^\circ+\sec^2 180^\circ$. [Ans. $-\frac{1}{2}$]

10. (*a*) Find the values of $\theta$ between $0^\circ$ and $360^\circ$ which satisfy the equation $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$.

[Ans. $120^\circ$ ; or, $0^\circ$, $120^\circ$, $360^\circ$]

(*b*) If $A+B+C=180^\circ$, prove that $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

## Second Paper (1961)

2. (*a*) If from a point outside a circle, a secant and a tangent be drawn to the circle, prove that the rectangle contained by the segments of the secant is equal to the square on the tangent.

(*b*) If the diagonals of a cyclic quadrilateral are at right angles, show that the perpendicular from the point of intersection to any side when produced backwards bisects the opposite side.

*Or*, (*b*) From the extremities of any chord $AB$ of a circle, perpendiculars $AQ$, $BR$ are drawn to the tangent at any point $P$. If $PM$ is perpendicular to $AB$, prove that $PM^2 = AQ.BR$.

3. Draw a circle of radius 1 inch, and then construct a regular hexagon circumscribing the circle.

*Or*, Take a straight line of length 2 inches and divide it into two parts such that the square on one part may be double the square on the other part. [*Statement of construction and distinct traces are to be given in either case, but no proof.* ]

4. Answer either (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Obtain the area of the triangle whose vertices are points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$.

[Ans. $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$]

(*b*) Find the area of the triangle whose vertices $A$, $B$, $C$ are respectively $(3, 4)$, $(-4, 3)$ and $(8, -6)$ ; hence or otherwise find the length of the perpendicular from $A$ on $BC$.

[Ans. 37·5 units of area ; 5 units of length]

(*c*) Obtain the equation of the straight line passing through the points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$. $\left[\text{Ans. } \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}.\right]$

(*d*) Obtain the equation to the perpendicular bisector of the line joining the points $(-2, 7)$ and $(8, -1)$. At what distance is the perpendicular bisector from the origin ?

[ Ans. $5x - 4y - 3 = 0$, distance $= \dfrac{3}{\sqrt{41}}$ units of length ]

7. (*a*) $A$ and $B$ are two fixed points whose co-ordinates are (2, 4) and (2, 6) respectively ; $ABP$ is an equilateral triangle on the side of $AB$ opposite to the origin. Find the co-ordinates of $P$.
[Ans. $(2+\sqrt{3}, 5)$]

(*c*) With the material of a hollow sphere of outer diameter 10 cms. and thickness 2 cms. is made a solid right circular cone of height 8 cms. Find the surface area of its curved surface to the nearest square centimetre $\left[\pi=\frac{22}{7}\right]$. [Ans. 234 sq. cm.]

(*d*) How is the angle between two intersecting planes defined ? When is a plane perpendicular to another plane ?

If two straight lines are parallel, and if one of them is perpendicular to a plane, prove that the other is also perpendicular to the same plane ?

---

## H. S. Exam. (Compartmental)—1961

### First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{2}$ ; $x+y=6$.
[Ans. $x=4, y=2$, or, $x=2, y=4$]

(*b*) If $x$ varies as $y^2$ and $y=4$ when $x=8$, find $y$ when $x=32$.
[Ans. $y=\pm 8$]

3. (*a*) If $a, b, c$ be in Arithmetical Progression and $x, y, z$ in Geometrical Progression, prove that $x^{b-c}\,y^{c-a}\,z^{a-b}=1$.

(*b*) If $x=3+4i$ and $y=3-4i$, where $i=\sqrt{-1}$, find the value of $x^3+y^3$.
[Ans. $-234$]

6. (*a*) If $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$, prove that $xyz=1$.

(*b*) Show that $\log_{10} 2+16\log_{10}\frac{16}{15}+12\log_{10}\frac{25}{24}+7\log_{10}\frac{81}{80}=1$.

### Group B—Trigonometry

9. (*a*) If $A$, $B$ and $A-B$ are all positive acute angles, prove geometrically that $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

10. (*a*) Prove that $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$.
(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that
$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

## Second Paper (Compl., 1961)

2. (*a*) Prove that the obtuse angle between the tangent at a point of a circle and a chord through the point of contact is equal to the angle in the alternate segment.

*Or*, If from any point on the circumcircle of a triangle perpendiculars are drawn to the sides of the triangle, prove that the feet of the perpendiculars are collinear.

(*b*) If two circles intersect, show that their common tangent subtends supplementary angles at the points of intersection.

*Or*, Two radii of a circle are perpendicular to each other, and a tangent cuts them when produced ; prove that the other tangents drawn to the circle from these points of intersection are parallel.

3. Take a straight line of length 6 cms. ; divide it into two segments such that the rectangle contained by the segments may be equal to a square on a side of length 2 cms.

*Or*, Draw a circle of radius 1 inch. Find out a point outside this circle such that the two tangents from it to the circle, and the line joining the points of contact may form an equilateral triangle. [*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. Answer either (*a*) and (*b*) or (*c*) and (*d*) :

(*a*) Obtain the distance between the points whose rectangular cartesian co-ordinates are $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

(*b*) Show that the triangle whose vertices are the points $(-2, -5)$, $(4, -1)$ and $(-1, 0)$ is isosceles.

(*c*) Obtain the equation to a straight line which is inclined to the $x$-axis at an angle $\theta$, and whose intercept on the $y$-axis is $c$.

(*d*) Show that the points $(1, 4)$, $(3, -2)$ and $(-3, 16)$ are collinear.

7. Answer any **two** of the following questions :—

(*a*) $A$ and $B$ are two fixed points on a plane, and a point $P$ moves on the plane in such a way that $PA = 2PB$ always. Prove either geometrically or analytically that the locus of $P$ is a circle.

(*b*) $OA$, $OB$, $OC$ are three straight lines on a plane. If $OP$ be perpendicular to $OA$ and $OB$, prove that it is perpendicular to $OC$ also.

(*c*) A solid right circular cylinder, whose height is 9 inches and diameter of the base 4 inches, is deformed into a sphere. Find the surface area of this sphere. [Ans. $113\frac{1}{7}$ sq. inch.]

(*d*) Find the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines $3x-7y+5=0$, $x-2y-7=0$ and has equal intercepts of the same sign along the axes.

[Ans. $x+y=85$.]

---

## H. S. EXAMINATION, 1962

### First Paper—Group A—Algebra

2. (*a*) Solve the equations : $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=2 \\ xy=8 \end{array}\right\}$

$$\left[\text{Ans. } x=4, y=2 \text{ or, } x=-\frac{10}{3}, \ y=-\frac{12}{5}\right]$$

(*b*) Given that the area of a circle varies as the square of its radius and that the area of a circle is 154 sq. feet, when the radius is 7 ft., find the area of a circle whose radius is 10 ft. 6 inches. [Ans. 346·5 sq. ft.]

3. (*a*) If $S_1$, $S_2$, $S_3$ be the sums of $n$ terms of three Arithmetic series, the first term of each being 1 and the respective common differences, 1, 2, 3, prove that $S_1+S_3=2S_2$.

(*b*) If 1, $\omega$, $\omega^2$ are the three cube roots of unity, prove that $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$.

6. (*a*) Given log 2=·30103 and log 3=·4771213, find the logarithms of (i) $5\frac{1}{16}$ and (ii) ·1875.

[Ans. (i) ·7043652, (ii) $\bar{1}$·2730013]

(*b*) Find the value of $7\log\frac{15}{16}+6\log\frac{8}{3}+5\log\frac{2}{5}+\log\frac{32}{25}$.

[Ans. log 3]

### Group B—Trigonometry

**9.** (*a*) If $A$, $B$, $A+B$ are all acute angles, prove geometrically that $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

(*b*) Show that $\sin 420^\circ \cos 390^\circ = \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ)=1$.

**10.** (*a*) Find the values of $\theta$ between $0^\circ$ and $360^\circ$ which satisfy the equation $\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$. [Ans. 30°, 150°]

(*b*) $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

## Second Paper (1962)

### Group A—Plane Geometry

**2.** (*a*) If two chords of a circle intersect inside the circle, prove that the rectangle contained by the parts of one, is equal to the rectangle contained by the parts of the other.

(*b*) Through any point $X$ on the common chord of two intersecting circles, chords $AB$ and $CD$ are drawn one in each circle. Prove that $AX.XB=CX.XD$.

**5.** Construct a regular hexagon circumscribing a circle of radius 1·5 inches. Measure a side of the hexagon. [Ans. 1·73″]

[*Statement of construction, traces of construction as well as justification, are to be given.*]

### Group B—Co-ordinate Geometry

**6.** (*a*) Find the co-ordinates of the point which divides in a given ratio $m_1 : m_2$ internally, the line joining two given points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

$$\left[\text{Ans.}\quad x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}\;;\quad y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$$

(*b*) The co-ordinates of the vertices of a triangle are $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$. Find the co-ordinates of the point where the medians of the triangle intersect.

[Ans. $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$]

**7.** (*a*) Find the angle between the straight lines whose equations are $y=m_1x+c_1$ and $y=m_2x+c_2$.

$$\left[\text{Ans. } \tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.\right]$$

(*b*) Find the equation of the straight line passing through the point $(-3, 1)$ and perpendicular to the line $5x-2y+7=0$.

[Ans. $2x+5y+1=0$]

### GROUP C—Solid Geometry and Mensuration

**11.** Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are coplanar.

**12.** If a right angle rotates about one of its arms, then the other arm describes a plane.

**13.** Find the volume and the lateral surface of a right prism 8 inches long, standing on an isosceles triangle, each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.

[Ans. vol.=96 cu. in., surface=128 sq. inch.]

**14.** A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 inches and 9 inches ; and the length of each of the slant edges is 8·5 inches. Find the height and the volume of the pyramid. [Ans. $h=4''$, $v=144$ cubic inch.]

---

## H. S. Exam. ( Compartmental )—1962

### FIRST PAPER—GROUP A—Algebra

**2.** (*a*) Solve the equation :

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{array}\right\}. \qquad \left[\text{Ans. } \left.\begin{array}{r} x=5 \\ y=3 \end{array}\right\} \text{or, } \begin{array}{r} x=-3 \\ y=-5 \end{array}\right]$$

(*b*) When a body falls from rest, its distance from the starting point varies as the square of the time elapsed. If a body falls from rest through $402\frac{1}{2}$ ft. in 5 seconds, how far does it fall in 10 seconds ? [Ans. 1610 ft.]

**3.** (*a*) The fifth term of a G. P. is 81 and the second term is 24 ; find the series. [Ans. 16, 24, 36, 54, 81,...]

(*b*) If $i=\sqrt{-1}$, show that $\frac{3+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{2+5i}=-\frac{8}{29}$.

**6.** (*a*) Find the logarithms of (i) 5832 to the base $3\sqrt{2}$ (ii) 81 to the base $\sqrt[3]{9}$. [ Ans. (i) 6. (ii) 6. ]

(*b*) Show that $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$.

## GROUP B—**Trigonometry**

**9.** (*a*) If $A$, $B$ and $A-B$ are all acute angles, prove geometrically that $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

(*b*) Show that $\cos A+\sin(270^\circ+A)-\sin(270^\circ-A)+\cos(180^\circ+A)=0$.

**10.** (*a*) Find the values of $\theta$ between $0^\circ$ and $360^\circ$, which satisfy the equation $\cot\theta+\tan\theta=2\operatorname{cosec}\theta$. [Ans. $60^\circ$ or $300^\circ$]

(*b*) Prove that $\tan\frac{\tan 5\theta+\tan 3\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}=4\cos 2\theta\cos 4\theta$.

## SECOND PAPER ( Compl., **1962** )

## GROUP A—**Plane Geometry**

**2.** (*a*) Prove that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

(*b*) $AB$ is the common chord of two circles, one of which passess through $O$, the centre of the other ; prove that $OA$ bisects the angle between the common chord and the tangent to the first circle at $A$.

5. Construct a square equal in area to a given rectangle whose adjacent sides are 1·5 in. and 2·5 in. Measure the side of the square. [*Statement of the construction and the traces are to be given.* ]

## GROUP B—**Co-ordinate Geometry**

**6.** (*a*) Find the distance between two points $P$ and $Q$ whose co-ordinates are $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

(*b*) Show that the straight line joining the two points $(-7, 3)$ and $(14, -6)$ passes through the origin.

7. (a) Find the equation of the straight line passing through two given points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

(b) Show that the three lines $3x+y=5$, $x+5y+3=0$ and $5x-2y=12$ meet in a point.

### Group C—Solid Geometry and Mensuration

**11.** If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that it is perpendicular to the plane in which they lie.

**12.** From $O$, the centre of a circle, a perpendicular $OA$ is erected to the plane of the circle. Prove that all points on the circumference are equidistant from any point on the perpendicular $OA$.

**13.** The length, breadth and height of a rectangular block are in the ratio 4 : 3 : 2, and the whole surface of the block is 1872 sq. in. Find the dimensions of the block and its volume.

[Ans. 24″, 18″, 12″ ; 5184 cubic feet]

**14.** Find the curved surface and the volume of a right circular cylinder whose height is 8 in. and the radius of whose base is 5 in. [ $\pi=\frac{22}{7}$ ]. [ Ans. $251\frac{3}{7}$ sq. in. ; $628\frac{4}{7}$ cubic inch.]

---

## H. S. Examination—1963

### First Paper—Group A—Algebra

**2.** (a) Solve the equations : $x+\frac{4}{y}=1$, $y+\frac{4}{x}=25$.

[Ans. $x=\frac{1}{5}$, $y=5$ ; or, $x=\frac{4}{5}$, $y=20$]

(b) The volume of a pyramid varies jointly as its height and the area of its base ; and when the area of the base is 60 square feet and the height 14 feet, the volume is 280 cubic feet. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 390 cubic feet and whose height is 26 feet ? [Ans. 45 sq. ft.]

**3.** (a) If $a$, $b$, $c$, $d$ be in G. P., show that

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

(b) If 1, $\omega$, $\omega^2$ be the three cube roots of unity, prove that

(i) $1+\omega+\omega^2=0$ ; (ii) $(3+\omega+5\omega^2)^6=(3+5\omega+3\omega^2)^6=64$.

6. (b) Given $\log 2 = \cdot 30103$ and $\log 3 = \cdot 4771213$, find (i) log 75 and (ii) log 4500. [Ans. (i) 1·8750613 (ii) 3·6532126]

### Group B—Trigonometry

3. (a) If $A$, $B$ and $A-B$ are all acute angles, prove that

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

9. (a) Find the values of $\theta$ between 0° and 360° which satisfy the equation $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$. [Ans. 15° and 105°]

(b) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

## Second Paper (1963)

### Group A—Plane Geometry

3. (a) Show that the acute angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternante segment of the circle.

(b) Two circles intersect at $A$ and $B$, and through $P$, any point on one of them, straight lines $PAC$ and $PBD$ are drawn to cut the other at $C$ and $D$. Show that $CD$ is parallel to the tangent at $P$.

4. Construct, to the scale, an isosceles triangle with each of the equal sides equal to 2 inches, and each base angle double the vertical angle.

*Or*, Divide a straight line of length 2 inches into two parts such that the square on one part may be three times the square on the other.

[ *Statement of construction and full, neat traces are to be given in any one of the above cases, but no proof.* ]

### Group B—Co-ordinate Geometry

5. (a) Obtain the distance between two points whose rectangular cartesian co-ordinates are $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$.

(b) Prove that the point (2, −2), (8, 4), (5, 7) and (−1, 1) are the successive angular points of a rectangle.

6. (*a*) Obtain the perpendicular distance from the point $(x_1, y_1)$ to the straight line $ax+by+c=0$.

(*b*) Find the ortho-centre of the triangle whose angular points are (2, 7), (− 6, 1) and (4, − 5). [ Ans. $(-\frac{10}{9}, \frac{49}{27})$]

## GROUP C—Solid Geometry and Mensuration

10. (*a*) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that it is perpendicular to the plane in which they lie.

(*b*) If $PA=PB=PC$, where $P$ is a point outside the plane of the triangle $ABC$, and if $PO$ be drawn perpendicular to the plane, prove that $O$ is the circum-centre of the triangle $ABC$.

(*c*) If two straight lines are both perpendicular to a plane, show that they are parallel.

(*d*) If the middle points of the adjacent sides of a skew quadrilateral are joined, prove that the figure so formed is a parallelogram.

11. A right circular cylinder and a right circular cone have equal bases and equal heights. If their curved surfaces are in the ratio 8 : 5, show that the radius of the base is to the height as 3 : 4.

*Or*, A sphere of diameter 6 cms. is dropped into a cylindrical vessel partly filled with water. The diameter of the vessel is 12 cms. If the sphere be completely submerged, by how much will the surface of the water be raised ? [Ans. 1 cm.]

## H. S. Examination—1964

### First Paper—Group A—( **Algebra** )

2. (*a*) Solve the equations :

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10} \end{array}\right\}$$

[ Ans. $x=5, y=2$ ; or, $x=\frac{4}{7}, y=-\frac{20}{21}$ ]

(*b*) Given that the illumination from a source of light varies as the square of the distance, how much farther from a candle must a book, which is now 8 inches off, be removed so as to receive just half as much light ? [Ans : $8(\sqrt{2}-1)$ in.]

3. (*a*) A man arranges to pay off a debt of £3,600 by 40 annual instalments which form an arithmetical series. When 30 of these instalments have been paid, he dies leaving a third of his debt unpaid ; find the value of the first instalment. [Ans : £51]

(*b*) If $\omega$ is an imaginary cube root of unity, prove that

$$(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9.$$

7. (*a*) Given $\log_{10} 165=2{\cdot}2175$ and $\log_{10} 6974=3{\cdot}8435$, find the value of $\sqrt[3]{{\cdot}00000165}$. [Ans : ${\cdot}06974$]

### Group B—(**Trigonometry**)

8. (*a*) If $A$, $B$, $A+B$ are all acute angles, prove geometrically

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

(*b*) If $\tan\theta+\sec\theta=x$, prove that

$$\sin\theta=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

9. (*a*) Find the values of $\theta$ between $0°$ and $360°$ which satisfy the equation $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$. [Ans : $30°, 150°, 210°, 330°$]

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$$
$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

**11.** Two chimneys are of equal height. A person standing between them in the line joining their bases, which is horizontal, observes the elevation of the nearer one to be $60^\circ$. After walking 80 feet in a horizontal direction perpendicular to the line joining their bases, he observes the elevations of the two to be $45^\circ$ and $30^\circ$ respectively. Find the height of the chimneys.

[Ans : $40\sqrt{6}$ or $20\sqrt{6}$]

## H. S. Examination—1964

### Second Paper—Group A—( **Plane Geometry** )

**1.** Construct a square equal in area to a given rectangle.

*Or*, Construct a regular hexagon about a given circle.

( Traces of construction only are required in *either* of the two constructions. ).

**2.** Prove that in every triangle, the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

$ABC$ is an isosceles triangle and $AY$ is drawn to cut the base internally at $Y$. Show that $AY^2 = AB^2 - BY.YC$.

**3.** Prove that, if two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.

Prove that the altitudes of two similar triangles are proportional to the corresponding sides.

**4.** Prove that if two chords of a circle intersect inside the circle, the rectangle contained by the parts of one is equal to the rectanale contained by the parts of the other.

In a triangle $ABC$, perpendiculars $AP$ and $BQ$ are drawn from $A$ and $B$ to opposite sides and intersect at $O$. Prove that

$$AO.OP = BO.OQ.$$

## Group B—( **Co-ordinate Geometry** )

5. Find the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$ internally in the ratio of $m : n$.

Write down the co-ordinates of the middle point of the straight line joining the points $(7, -4)$ and $(-5, 6)$. [Ans : (1, 1)]

6. Find the equation of the straight line passing through the intersection of the straight lines $2x-7y+11=0$ and $x+3y-8=0$ if it
   (*a*) passes through the origin ;
   (*b*) is perpendicular to the straight line $2x-5y+6=0$ ;
   (*c*) makes equal intercepts on the two axes.

[Ans : pt. of int. $(\frac{23}{13}, \frac{27}{13})$ ; (*a*) $27x-23y=0$,
(*b*) $5x+2y-13=0$, (*c*) $13x+13y-50=0$.]

## Group C—( **Solid Geometry and Mensuration** )

**10.** Give instances from the sides and edges of a cube of :
   (*a*) parallel planes,
   (*b*) planes perpendicular to one another,
   (*c*) lines parallel to a plane,
   (*d*) lines perpendicular to a plane,
   (*e*) pairs of skew lines.

*Or*, Prove that if a straight line is perpendicular to each of two intersectiing straight lines at their point of interseetion, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

**11.** The volume of a right prism is 80 cu. ft. and its base is a triangle whose sides are 3 ft., 4 ft. and 5 ft. respectively. Find the height and the area of the total surface of the prism.

[Ans : $h=13\frac{1}{3}$ ft., area=172 sq. ft.]

*Or*, A conical tent is required to accommodate 4 people ; each person must have 20 sq. ft. of space on the ground and 100 cu. ft. of air to breathe. Find the height and radius of the tent. $[\pi=\frac{22}{7}]$. [Ans : $h=15$ ft., $r=5{\cdot}05$ ft.]

## C. U. PRE-UNIVERSITY EXAMINATION—1961

### GROUP A—**Algebra**

**1.** (*b*) In a "Geometrical Progression", the first term is 5, the last term is 320 and the sum of the series is 635 ; find the 4th term. [Ans. 40]

**2.** (*b*) Use logarithmic tables to calculate the value of $2{\cdot}41 \times (1{\cdot}24)^{\frac{1}{3}} \div (0{\cdot}78)^{\frac{1}{2}}$, correct to two places of decimals. [Ans. 2·93]

### GROUP B—**Trigonometry**

**5.** (*a*) Show geometrically, that if $A$ and $B$ are positive acute angles and $A > B$, then $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

(*b*) If $A$, $B$, $C$ are the angles of a triangle, shew that

$$\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B - C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

**6.** (*a*) Shew that

$$\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

**8.** (*a*) Find the value of $\sin 18^\circ$. [Ans. $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$]

### GROUP C—**Co-ordinate Geometry**

**9.** (*a*) The co-ordinates of $A$, $B$, $C$ are $(-1, 5)$, $(3, 1)$ and $(5, 7)$ respectively. $D$, $E$, $F$ are the middle points of $BC$, $CA$, $AB$ respectively. Calculate the area of the triangle $DEF$.

[Ans. 4 sq. units]

(*b*) Obtain the equation of the straight line through the point (2, 1) and perpendicular to the line joining the points (2, 3) and (3, −1). [Ans. $x - 4y + 2 = 0$]

**10.** (*a*) Obtain the equation of the locus of a point which moves in the plane of ($xy$) in such a way that its distance from the point (2, 3) is always two-thirds of its distance from $y$-axis.

[Ans. $5x^2 + 9y^2 - 36x - 54y + 117 = 0$]

**12.** (*a*) Obtain the equations of the lines which bisect the angles between the lines (*i*) $a_1x + b_1y + c_1 = 3$ and

(*ii*) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

## Group D—**Solid Geometry & Mensuration**

**13.** If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, shew that it is also perpendicular to the plane in which they lie.

**14.** (*a*) Find the locus of a point in space equidistant from two given points.

(*b*) Three solid spheres of gold whose radii are 1 cm., 6 cms. and 8 cms. respectively are melted into a single gold sphere. Find the radius of the sphere so formed. [Ans. 9 cm.]

# C. U. PRE-UNIVERSITY EXAM.—1962

## Group A—**Algebra**

**1.** (*a*) If $x+iy=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$, where $i=\sqrt{-1}$, find $x$ and $y$.

$$\left[\text{Ans. } x=\frac{4}{7},\ \ y=-\frac{\sqrt{6}}{14}\right]$$

(*b*) In an *A. P.* the first term is 2, the last term 29, the sum 155 ; find the common difference. [Ans. 3]

**2.** (*a*) If $P$ varies as the sum of two quantities of which one varies directly as $x$ and the other inversely as $x$ and if $P=6$ when $x=4$ and $P=3\frac{1}{3}$ when $x=3$, find $P$ when $x=2$. [Ans. 0]

(*b*) Use logarithmic tables to calculate the value of

$$\frac{(48{\cdot}7)^{\frac{1}{3}}\times({\cdot}00321)^{\frac{1}{2}}}{0{\cdot}372}.$$ [Ans. ·07696]

## Group B—**Trigonometry**

**5.** (*a*) Shew, geometrically, that if $A$ and $B$ are positive acute angles and $(A+B)<90^\circ$, then

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

(*b*) Show that $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

## Group C—Co-ordinate Geometry

**9.** (*a*) Find the angle between the two st. lines

$$y=mx+c,\ y=m'x+c'.$$

(*b*) Obtain the equations to the st. lines each of which passes through the point $(2, -1)$ and intersects the axes of co-ordinates at points equidistant from the origin and calculate the angle between them.

[Ans. $x+y=1$, $x-y=3$ ; a right angle.]

**12.** (*b*) A point $P$ moves in the plane of $(xy)$ in such a way that its distance from the lines $12x+5y-4=0$ and $3x+4y+7=0$ are equal ; obtain the equation to the locus traced out by $P$.

[Ans. $7x-9y-37=0$, or, $99x+77y+71=0$]

## Group D—Solid Geometry & Mensuration

**13.** (*a*) Show that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point on it are co-planar.

(*b*) The diagonal of a rectangular block is 10 cms., and the sum of the lengths of its edges is 80 cms., calculate the total area of the outer surface of the block. [Ans. 6300 sq. cm.]

**14.** (*b*) A right circular cone is 10 cms. high and its slant height is 15 cms. Calculate the volume of the cone. [$\pi=\frac{22}{7}$.]

[Ans. $1309\frac{11}{21}$ cu. cm.]

# C. U. PRE-UNIVERSITY EXAM.—1963

## Group A—Algebra

**1.** (*a*) Express $(3+i)(4+3i)(5+7i)$ in the form of $A+iB$, where $i=\sqrt{-1}$.

[Ans. $-46+128i$]

(*b*) If $x, y, z$ be the $p^{th}$, $q^{th}$ and $r^{th}$ terms respectively of a G. P., prove that $x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q}=1$.

**2.** (*a*) Solve $x+y=5$, $x^2+2y^2=17$.

[Ans. $x=3$, $y=2$, or, $x=\frac{11}{3}$, $y=\frac{4}{3}$.]

**4.** (*b*) Prove that $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$.

## Group B—Trigonometry

5. (*a*) Prove geometrically that if $A$ and $B$ are positive acute angles and $A+B<90°$, $\cos(A+B)=\cos A \cos B - \sin A \sin B$.

(*b*) Express $\cos 4\theta$ in terms of $\cos \theta$.

[ Ans. $8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ ]

6. (*b*) Show that $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$.

## Group C—Co-ordinate Geometry

9. (*a*) Find the area of the triangle, the co-ordinates of whose vertices are $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$.

(*b*) If $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$ be the co-ordinates of the vertices $A$, $B$, $C$ respectively of the triangle $ABC$ and if $D$ is the middle point of $BC$, find the co-ordinates of $G$ which divides $AD$ such that $AG=2GD$.

[Ans. $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$]

10. (*a*) Find the equation of the st. line passing through the point (3, 5) and parallel to the line $4x - 3y + 1 = 0$.

[Ans. $4x - 3y + 3 = 0$.]

11. (*a*) Find the locus of the point whose distance from the point $(-1, 1)$ is equal to its perpendicular distance from the st. line $x+y+1=0$. [Ans. $x^2+y^2-2xy+2x-6y+3=0$]

## Group D—Solid Geometry & Mensuration

13. (*a*) Prove that two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

(*b*) If a st. line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, show that it is also perpendicular to the plane in which they lie.

14. (*a*) Three solid gold spherical beads of radii 3, 4, 5 cms. respectively are melted into one solid spherical bead. Find its radius. [Ans. 6 cms.]

(*b*) The volume of a right circular cylinder and a right circular cone standing on the same base are as 3 : 2. Show that the height of the cone is double the height of the cylinder.

## B. U. ENTRANCE EXAMINATION—1961

### Group A—Algebra

1. (*b*) Solve $x+y+3\sqrt{x+y}=x^2+y^2=10$.

[Ans. $x=3$, $y=1$ ; or, $x=1$, $y=3$]

(iii) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}$, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}$ [Ans : $x=2$, $y=1$ ; or, $x=1$, $y=2$]

4. (*a*) Prove $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = \log_a a$.

(*b*) Find $S_n$, when $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$\left[\text{Ans. } 2-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$

Calculate the lowest value of $n$ so that $2-S_n<\frac{1}{100}$. [Ans. 8]

### Group B—Trigonometry

5. (*a*) Prove geometrically

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$,

when $0<A<\frac{\pi}{2}$, $0<B<\frac{\pi}{2}$ and $A+B<\frac{\pi}{2}$.

(*b*) If $A+B+C=\pi$, prove that

$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$.

### Group C—Co-ordinate Geometry

8. (*a*) Find the equation to the straight line passing through the intersection of lines $x+2y-3=0$ and $3x+4y+7=0$ and perpendicular to the straight line $y-x=8$. [Ans : $x+y+5=0$]

(*b*) Show that three points (4, 2), (7, 5) and (9, 7) are in one straight line and find the equation of the line of collinearity.

[Ans : $x-y=2$]

### Group D—Solid Geometry & Mensuration

12. (*a*) All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point on it are coplanar.

(*b*) Find the volume and the lateral surface of a right prism of height 8 inches standing on an isosceles triangle each of whose equal sides is 5 inches and the other side is 6 inches.

[Ans. Vol.=96 cu. in. ; lateral surface=128 sq. in.]

## B. U. ENTRANCE EXAM.—1962

### GROUP A—Algebra

1. (*a*) Represent geometrically the numbers $3+2i$, $6+4i$ and $9+6i$. Find the modulii.

[Ans. Modulii $=+\sqrt{13}$, $+2\sqrt{13}$, $+3\sqrt{13}$]

(*b*) Solve : (i) $x^2+y^2+xy=84$, $x+y=10$.

[Ans. $x=8$, $y=2$ ; or, $x=2$, $y=8$]

(ii) $y^x=4$, $y^2=2^x$.

[Ans. $x=2$, $y=\pm 2$ ; or, $x=-2$, $y=\pm\frac{1}{2}$]

4. (*b*) If $\frac{\log x}{b-c}=\frac{\log y}{c-a}=\frac{\log z}{a-b}$, prove that $x^a y^b z^c=1$.

### GROUP B—Trigonometry

5. (*a*) Prove geometrically that

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$, where A and B are positive and acute and $A>B$.

(*b*) If $A+B+C=\pi$, prove that

$\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C$.

8. (*a*) Find out the value of $\sin 18°$.

### GROUP C—Co-ordinate Geometry

9. (*a*) Prove analytically that the line joining the middle points of any two sides of a triangle is half the third side.

(*b*) Find the equations of the medians of the triangle whose vertices are the points $(3, 2)$, $(1, -1)$, $(-19, -9)$ and show that they are concurrent.

[Ans. $7x-12y+3=0$, $5x-18y-23=0$, $19x-42y-17=0$.]

### GROUP D—Solid Geometry & Mensuration

13. (*a*) If two st. lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, show that the other is also perpendicular to that plane.

(*b*) Show that all st. lines drawn perpendicular from a given point to a system of parallel st. lines in space are coplanar.

14. (*a*) How many solid circular cylinders of length 8 in. and diameter 6 in. can be made out of the material of a solid sphere of radius 6 inches ? [Ans. 4]

(*b*) A right circular cone 15 cm. high, the radius of the base being 8 cm., has its upper part cut off by a plane through the middle point of its axis and parallel to the base. Find the volume of the truncated cone. [Ans. 880 cu. cm.]

## B. U. ENTRANCE EXAM.—1963

### GROUP A—**Algebra**

1. (*a*) Solve (any two) :—(i) $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$, $x+y=5$.

(ii) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3, x+y=9$ (iii) $x^{y}=y^{2}$, $y^{2y}=x^{4}$.

[Ans. (i) $x=1$, $y=4$, or, $x=4, y=1$ ; (ii) $x=1$, $y=8$ or, $x=8, y=1$ ; (iii) $x=\pm 2$, $y=2$ ; $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=-2$]

(*b*) Three globes of gold whose radii are 3, 4 and 5 inches are melted and formed into a new globe ; find the radius of the new globe given that the volume of a globe varies as the cube of its radius. [Ans. 6 inches. ]

### GROUP B—**Trigonometry**

6. (*a*) Prove geometrically that

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$, when A and B are positive and acute and $(A+B)<90°$.

(*b*) If $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$,

prove that $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

7. (*a*) If $\alpha+\beta=\gamma$, show that $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$

$=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

### GROUP C—**Co-ordinate Geometry**

10. (*a*) Show that the area of the triangle, the co-ordinates of whose angular points are $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\left(b, \frac{1}{b}\right)$ and $\left(c, \frac{1}{c}\right)$ is

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc}.$$

(*b*) If the centroid of a triangle is (1, 4) and two of its vertices are (4, −3) and (−9, 7), find the other vertex. [Ans. (8, 8). ]

11. (*a*) Show that the equation

$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$ where $\lambda$ is an arbitrary constant, represents any straight line passing through the point of intersection of the lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$.

(*b*) Find the equation of the straight line which passes through $(x_1, y_1)$ and is perpendicular to the join of $(x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3)$.

[Ans. $(y_3-y_2)y+(x_3-x_2)x=(y_3-y_2)y_1+(x_3-x_2)x_1$]

## Group D—Solid Geometry & Mensuration

14. (*a*) If two intersecting planes are each perpendicular to a third plane, prove that their line of intersection is also perpendicular to that plane.

(*b*) If of three lines of intersection of three planes, two be parallel, show that the third will also be parallel to the other two.

15. (*a*) The length, breadth and the height of a closed box are 12 in., 10 in. and 8 in. respectively and the total inner surface is 376 sq. in. If the walls of the box are uniformly thick, find the thickness. [Ans. 1 inch. ]

(*b*) If S be the area of the curved surface, $v$ the volume, $h$ the height and $\alpha$ the semi-vertical angle of a right circular cone, prove that $S=\frac{\pi h^2 \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ and $v=\frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$.

---

# LOGARITHMS

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | | | | | | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 |
| | | | | | | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | | | | | | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 23 | 27 | 31 | 35 |
| | | | | | | 0607 | 0645 | 0682 | 0710 | 0755 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | | | | | | 3 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 |
| | | | | | | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | | | | | | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| | | | | | | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | | | | | | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| | | | | | | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | | | | | | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| | | | | | | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | | | | | | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 24 |
| | | | | | | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | | | | | | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| | | | | | | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 3 | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | | | | | | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 |
| | | | | | | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | | | | | | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| | | | | | | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 7 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 5 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 1 2 | 3 3 4 | 4 5 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 4 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| ·40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| ·49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ·51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| ·56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| ·61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| ·67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| ·71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| ·72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| ·73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ·74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| ·77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| ·78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| ·79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| ·80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| ·81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| ·84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| ·85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| ·88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| ·89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| ·90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| ·93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| ·96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| ·97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| ·98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| ·99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |